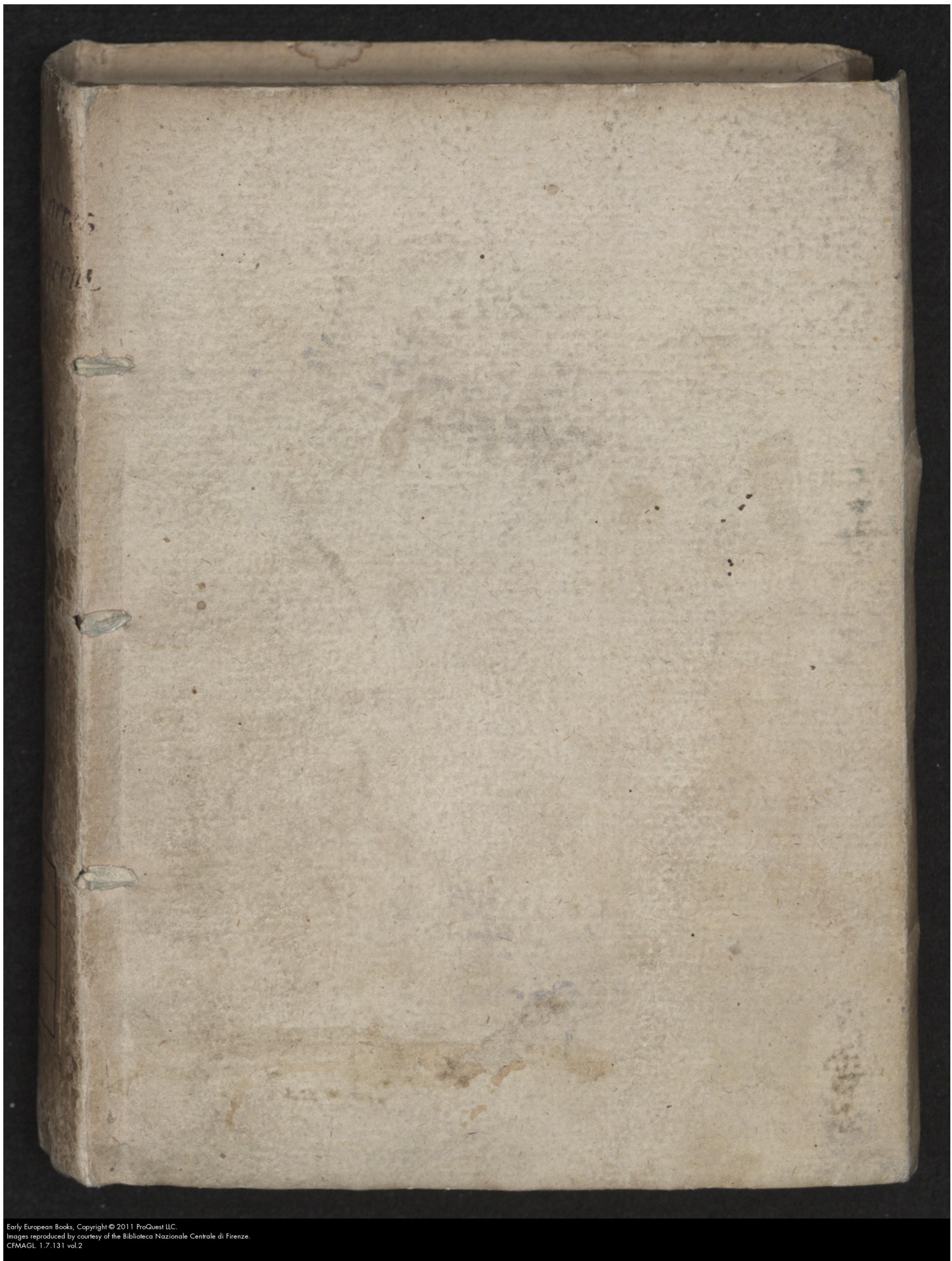
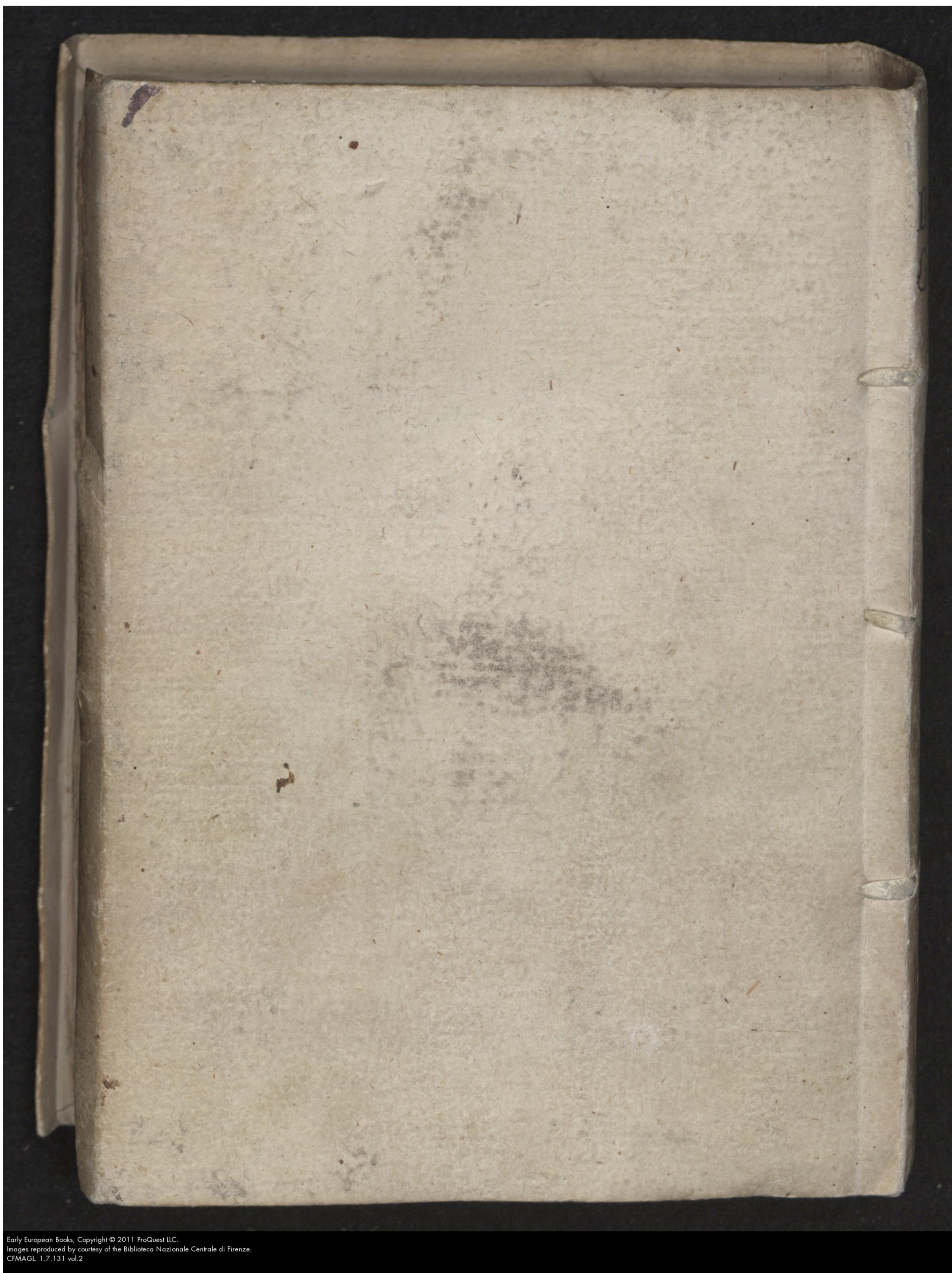
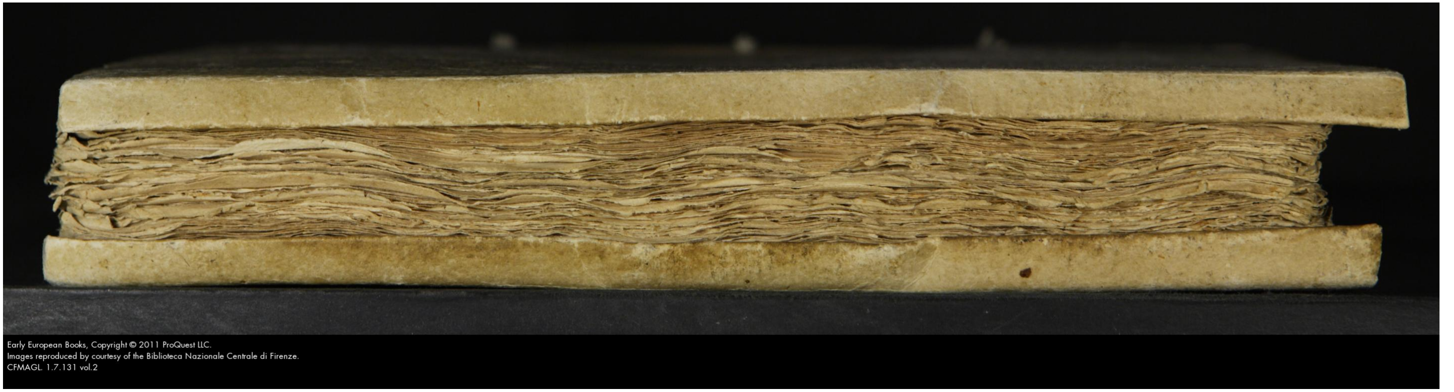












XI
CART.
Geom. &C
2

RENATI

DES-CARTES

GEOMETRIÆ

PARS SECUNDA.

Cujus contenta sequens pagina exhibebit.

CATALOGUS

eorum,

Quæ in hâc secundâ parte continentur.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheseos Universalis, seu Introductio ad CARTESIANÆ GEOMETRIÆ Methodum. Conscripta ab ERASMIO BARTHOLINO.

FLORIMONDI DE BEAUNE duo tractatus posthumi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus Æquationum.

JOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum Linearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

PRINCIPIA MATHESEOS VNIVERSALIS,

SEV

INTRODUCTIO

AD

GEOMETRIÆ METHODVM RENATI DES CARTES,

Conscripta ab

ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

Editio secunda, priore correctior.





AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
CIↃ IↃC LXI.

Generis & virtutum Nobilitate Perillustri & Generoso Heroï,

D. CHRISTIANO THOMÆ,

TOPARCHÆ IN STAVGARD,

Equiti Aurato, Sereniſſimæ Regiæ Majeſtatis Cancellario Magno, Regni Daniæ Senatori primario, Regiæ Academiæ Hafnienſis Conſervatori ſummo, Patrono incomparabili.

NON minùs verè quàm eleganter, Cicero lib. 1. Tuſc. quæſt. *Magni*, inquit, *eſt ingenii revocare mentem à ſenſibus, & cogitationem à conſuetudine abducere.* Cum enim mens noſtra, quam in nobis concluſam circumferimus, divina quædam particula habeatur, nihil ſanè illi gratius accidere poteſt, quàm, recùm contemplando à corporeis rebus laxatur, originique ſuæ quàm ſimillima redditur. Senſuum quippe

uſurâ non minus fruuntur bruta animantia, quàm homines, imò, quædam longè nobis præſtant; mente verò quia non gaudent, univerſam hanc mundi machinam, quaſi tabulam pictam aſpiciunt, nec cogitant quâ de causâ quóve modo tot varietates rerum ſint ordinatæ. Quicunque igitur hominum non cupiunt ſemetipſos privare bono, quo reliqua animantia excedunt, non temerè permittent ſeſe ſenſuum judicio ita mancipari, ut ea ſufficere putent, quæ manibus quaſi palpare poſſunt, ac pauca velint ſi non oculis omnium obvia, pauciora credant quæ ſenſus non approbant, & pauciſſima eligant, niſi ab experientia firmentur. Non equidem diffiteri poſſumus, hoc propoſitum utile eſſe atque neceſſarium, ut initio juvetur cogitatio noſtra & intel-

intellectus; unde factum eſt, quòd Geometræ figuras, Arithmetici numerorum characteres, aliique alia ſubſidia invenerint; Sed experimentis ejuſmodi vix acquieſcere debent magna ingenia, nec poteſt is, qui ſapientiæ famam affectat. Communis enim experientia docet, multa facilè mereri mentis aſſenſum, & eſſe veriſſima, etiamſi ſenſuum judicio pro veris non agnoſcantur: & vice verſâ, ſenſus quædam approbare; quæ, quia falſa, ratio nullo modo admittere poteſt. Atque hæc licèt omnibus in confeſſo ſint, non deſunt tamen, qui nihil niſi Praxin amantes, Theoriam & ſpeculationes omnes odio proſequuntur, atque ut inutilia eliminant: quos pertinaciæ ſuæ ſerò nimis pœnitebit, cùm aliorum imperio ita ſubjecti eſſe coguntur, ut ne

 in

in Praxi quidem ſolita obſtacula removere ſciant, nec unquam novi quicquam addiſcant, niſi quod vel caſus ipſis, vel aliorum humanitas ſuppeditaverit. At alii, quorum animus longiùs exſpatiatur, & demonſtrationes cauſasq́ue inquirit, utilia multa inveniunt, quæ ab aliis ignorantur; adeoq́ue in Praxi multa excogitantes compendia, allaborant ut tædia & impedimenta obvia tollantur; quorum tamen inventa non eſſent repudianda, etiamſi humani ingenii imbecillitas, aut uſus raritas, ea ſtatim ad praxin revocare prohiberet. Hinc non contenti doctiores iis, quæ à Geometris aut Arithmeticis demonſtrata atque inventa ſunt, quæq́ue uſus dudum confirmavit, niſi vel ipſas demonſtrationes penetrare, eaſdemq́ue invenire poſſint; adeoq́ue ſuper-

ſuperflua reſcindere, defectus ſupplere, & deperdita reſtituere queant. Neque enim exiſtimandum eſt, majores noſtros omnem poſteris præripuiſſe materiem, quâ excolatur ingenium; cum contra ſocordiæ meritò nos incuſarent, ſi plus temporis in ſcriptis ſuis etiamnum intelligendis impendi, quàm ipſi in incognitis inveniendis poſuêre, viderent. Ad quæ invenienda cum non aliâ viâ, (quantum conſtat) quàm quæ per compoſitionem & reſolutionem procedit, uterentur, quæque naturalis potiùs ingenii facultas aut induſtria, uſu & exercitatione potita, quàm ars certis legibus & præceptis contenta, dici meretur; Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, cujus principia tradit hoc opuſculum. quæ poſtquam innotuit,
lon-

longè plura & majora, quàm ab Antiquitate nobis relicta sunt, in lucem prodiêre. Non patitur tempus & lex scribendi, ut commemorem, quanta ex hac arte, non tantùm ad Arithmeticam, Geometriam, Mechanicam, sed etiam Opticam aliasque scientias manaverint emolumenta. Nihil enim sani antehac de visu novimus, cum omnia hîc, sicut in aliis artibus, quæ materiæ immersæ, non abstrahuntur à sensibus, ad directionem mentis, disputationibus huc illuc trahebantur; jam omnia determinata, omnia demonstrationibus munita. Qui enim in Opticis non planè hospites sunt, sat sciunt, quàm incerta, quamque defectuosa fuerint ea, quæ de Refractionum legibus antea novimus, & quàm falsa illa determinatio figuræ vitrorum, (de quibus

Dio-

Dioptrica agit) quâ nihil jam nobis optari poteſt perfectius, nihil certius. ſed de his forſan aliàs. Id mihi in præſens ſufficit, hanc artem ſibi proprio jure vendicare non ſolùm ea, quæ de Matheſeos utilitate, deque Arithmeticæ, Geometriæ, Aſtronomiæ, & Muſicæ præſtantia, tot rationibus, tot voluminibus, totque ſeculis dicta ſunt, ſed & multò plura; quod facilè demonſtrare poſſem, niſi plurimis, qui hæc penitiùs introſpicere dignantur, notum id fore ſcirem. Nec opùs mihi eſt, multa coram Te, Heros Perilluſtris, de hujus artis totiusque Matheſeos utilitate dicere: quoniam, dum animus tuus magna ſemper & excelſa meditatur, Mathematicas etiam ſcientias coluiſti & amplexus es, nihilque Tibi ad ſapientiæ complementum deeſſe voluiſti. Sed malo de

Heroïcis & eximiis tuis virtutibus tacendo, publicum omnium teſtimonium implorare, quàm in præſens pauca dicere. Ars ſanè Analytica perſpectum habet, cujus viri præſidium expectat, cùm implorat tuum: nec enim Daniæ unquam, quamdiu Matheſis aliæque artes liberales tales invenerint Patronos, vel virtus vel ſapientia deficiet. Patere igitur, Heros Perilluſtris, nomini tuo Principia hæc inſcribi, & fructum inceptæ peregrinationis ſerenâ fronte accipe. Tui enim nominis clypeo munita, frontem audent obvertere hoſtibus, quibus ſeculum hoc abundat, quique varia tela in obvios effundere non verentur, prout affectus malevoli ipſis dictaverint. Solent plerique, qui rodere amant, objicere, pervulgata omnia eſſe & ex aliis deſumpta; quâ cenſurâ

quam-

quamquam ſciam hoc ſcriptum non poſſe notari; tamen præſagit animus, fore, ut hæc tanquam inutilia & nimis curioſa rejiciant. Si enim intellexerint, hoc ambitu, etiam Algebram complecti; faſtidio commoti, ſubtilitates ejus cane pejus & angue fugient. Sed vix metuet ſibi Ars Analytica à talibus hoſtibus, nam, cum doctiſſimis quibusque Mathematicis, quibus ſeculum hoc quaſi ſuperbit, probetur, de reliquis ipſi minus eſt laborandum: nec ulla alia hujus Methodi defenſio requiritur, niſi quàm experientia, & ipſius rei intellectæ uſus attulerit. Et, ut verba in pauca conferam, ſi tuo exactiſſimo limatiſſimoque judicio probentur, nullius in poſterum cenſuram aut notam pertimeſcent. Neque ego exilitate operis deterritus, ſed contra utilitate po-

tius instigatus, Tibi hæc consecrare sum veritus: & quidem tantâ majore fiduciâ, & spe certiore, quantò certius mihi constat Te omnibus iis, qui inter bonas artes etiam Mathematicis incumbunt, favere; quem favorem quotidie familia nostra sentit, & grato animo semper recolit. Vale regni Daniæ decus, & æqui bonique consule hoc grati animi monumentum, quod humillimè offert

PERILLVSTRIS GENEROSITATIS TVÆ

Scribebam Leidæ, Anno CIↃ IↃC L. *Calend. Iun.*

Devotissimus & obsequentissimus cliens

ERASMIUS BARTHOLINUS.

LECTORI S.

CVm omnes ſapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamq; indignum ſapientis gravitate atque conſtantia ſit, quàm aut falſum ſentire, aut quod non ſatis exploratum ſit, ſine ulla dubitatione defendere: neſcio quo fato fiat, quòd non operam dent ejuſmodi ſtudiorum viam ingredi, quâ mens adſueſcat verum à falſis & dubiis diſtinguere. Quandoquidem enim à teneris adſueſcere multum eſt, egregiè ſibi conſulerent, ſi ad Matheſin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem diſciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari poteſt, modò conſideretur, quicquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmiſſis neceſſitate quadam ſequi: vel verum, vel dubium, vel falſum, prout præmiſſæ variis modis ſeſe habuerint: Adeò ut, etſi non aliis uſibus inſerviret Matheſis, tamen vel hoc nomine, ad ſui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea ſperaretur emolumentum. Quod cum abundè obſervatum & uſu comprobatum ſit à Veteribus, quos plerique noſtra ætate ita ſuſpiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidiſſe videantur, quàm quantum noſtrorum ingeniorum acies intueri poteſt; inter alia mirari ſubit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deſeruiſſe. Quippe compertum eſt, antiquos Philoſophos non permiſiſſe, ἀγεωμετρήτους ſcholas ſuas ingredi, ut ad Sapientiæ ſtudium admitterentur, quiq; ante non haberent λαβὰς τῆς φιλοσοφίας. Quod ſanè propoſitum, non ratione prudentius, quàm eventu felicius fuit: cum hanc fuiſſe cauſam, quòd ad illam pertigerint ſcientiam, quam poſteritas tantopere miratur, & quò virtute ſua nonnulli eniti ſe poſſe deſperant, conjiciam. Fruſtra enim ſpectatur fructus diſciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere poteſt, qui non ſolerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt,

negligit. Mathesis autem, cum ex notionibus simplicissimis, cognituq; facillimis, ad difficiliora atque remotissima quæque cognoscenda perducat juniores, qui præconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectiorum inhærent; non dubito, quin si ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compositarum atque obscuriorum, cognitionem sit penetratura. Et quoniam Mathesis variis partibus constat, quæ omnes circa quantitatem versantur; res à nostri seculi Luminibus eò redacta est, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hæc in universali & abstracto per literas Alphabeti concipi possit. Ita enim, factâ ad omnes quantitatis species applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas distinctè progredi potest. Postquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus sperari poterat; opportunè nobis Nobilissimus D. Des-Cartes, insuperabilis ingenii Vir (qui, reclusâ à se, hactenus incognitâ, ad veram sapientiam viâ, post tot seculorum fœdissimam servitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ mysteria pandit, ut veræ sapientiæ studium, humanarumq; scientiarum encyclopædia & perfectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum est, non aliâ ratione quàm studio & diligentiâ evinci possit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi subsidio redegit: cum ipsarum testimonia non tantùm invitos laudumq; suarum detractores in illis palmam ei dare cogant, sed etiam quousque humanum ingenium in iisdem progredi quidvè præstare valeat determinent. Verùm enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, & radices stirpesq; non item: sic multi ad summa pervenire optarent, nisi in elementis hærere opùs haberent. atqui, quemadmodum illa altitudo sine radicibus, stirpibusq; esse non potest; ita illi frustra se in id fastigium recipi sperant,

quibus cordi non eſt fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita ſint ulla principia, quæ ad adyta hujus Methodi ducerent; quid mirum? ſi multi in ipſo limine hæſitaverint, pluresq́, quos, re inexpertâ, deſperatio in fugam averterit. Etenim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctiſſimi ejus Commentatores à ſemetipſis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas ſubtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum ſternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipſo olim, quàm à multis hodie expetita, præſtitum eſſe repererim: diu multumq́, inter ſpem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea deſiderari, quæ ad ſcientiarum incrementa emunctioris naris homines neceſſariò requiri jam pridem cepêrunt. Ego ſanè opportunitate mira, ante aliquot annos voti compos factus, poſtquam ad haſce oras, Academiam Illuſtrem, quæ Leidæ eſt, acceſſi, Vir Celeberrimus atque Doctiſſimus Franciſcus à Schooten, Matheſeos ibidem Profeſſor publicus, me Artem Analyticam, hancq́, Methodum, tam eximiâ fide docuit, ut ad perfectionem nihil mihi præter ingenium & propriam induſtriam defuiſſe crediderim. Quocirca ſepoſitâ privati commodi æſtimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ propriis uſibus deſtinaveram, publici juris redderem, de elementis hiſce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cœpi. Et licet vererer ne amicitiæ jura, quæ inter nos cum fide ſemper ſervari optabam, hac ratione violarem; tamen facilem mihi veniam ſperabam, ſi non niſi officioſa fraude fallerem, quæ gloriæ ejus, qui ſe bono publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum gratum teſtari poſſet. Ac ne primas quidem ſpes fortuna deſtituit; quippe ab ipſo, qui nullum erga me benevolentiæ pignus atque indicium omittit, non modò veniam hujus Zeli impetravi, ſed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemq́, ingenii & conſilii ſui porrigere. Operis

brevi-

*brevitatem quod attinet, non est, quam displicere cuipiam putem: siquidem copiam exemplorum, quibus ad discendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hîc desiderabit; in quibus afferendis ejusmodi delectus est observatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipso Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo sparsim ita sunt disposita, ut, meo judicio, non alio loco meliùs intelligi, simulq; prædictis locis illustrandis inservire potuerint. in quem finem, in margine paginarum citationem additam esse apparebit. Adeò ut, quicunque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, leviq; numerorum irrationalium notitiâ instructus, in allatis exemplis accuratè examinandis sese exercuerit, se non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam D*ni*. Des-Cartes accesserit, consumpsisse experturus sit. Quin imò videbit januam reseratam omni ei, quod ab Algebra & Analysi Geometrica exspectari potest: ideoq; se Matheseos Vniversalis constitutionem animo comprehendisse. neque enim existimo, hisce intellectis, operæ pretium fore, Algebræ vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licèt leviorem ejus notitiam, vel ipse D. Des-Cartes, antehac, ad suæ Geometriæ Methodum intelligendam, requisiverit. Vale.*

PRIN-

PRINCIPIA MATHESEOS VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO AD GEOMETRIÆ METHODVM RENATI DES CARTES.

De logistica quantitatvm simplicivm.

CUm in omni Scientia, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile ſit à ſimpliciſſimis & cognitu facillimis ordiri; haud inconſultum fuerit, ad generalem atque facilem comprehenſionem Mathematicarum Scientiarum, quæ omnes circa quantitatem verſantur, ad ea primùm attendere, quæ non aliquam ejus ſpeciem excludere, ſed eas, quocunque ſe habeant modo, ſub certis notis cuique obviis repræſentare poſſint. Unde cum in univerſa illarum Scientiarum conſtitutione, licet diverſa objecta reſpiciant, non niſi relationes ſive proportiones quædam, quæ in iis reperiuntur, conſiderentur; conſentaneum eſt rationes atque proportiones illas ſeorſim ſpectare, eaſque literis Alphabeti, utpote notis ſimpliciſſimis nobiſque cognitiſſimis, inſignire. Neque enim ratio ulla eſt, quo minùs per *a*, *b*, *c*, &c. concipiantur magnitudines *a*, *b*, *c*, &c. quàm pondera aut numeri iiſdem characteribus deſignati. Attamen quia tum phantaſiæ tum ſenſibus ipſis, nihil ſimplicius nec diſtinctius exhiberi poſſe occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præ-

Vide diſſertationem de methodo, parte ſecunda.

ſtat per prædictas literas ſolummodo lineas rectas concipere. Hinc ſi duæ fuerint quantitates deſignatæ per *a* & *b*, intelligentur per ipſas duæ differentes lineæ rectæ, diverſæ ſcilicet longitudinis: ita ut per *a* intelligatur longitudo ſeu quantitas unius, & per *b* longitudo ſeu quantitas alterius. Non ſecus atque per *a* & *a*, aut per *b* & *b* duæ intelliguntur lineæ æquales; niſi indicaveris ſuppoſuériſve *a* eſſe æqualem ipſi *b*, vel *a* & *b* ejuſdem eſſe valoris, id quod ſic denotatur $a \infty b$. Et ſic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua ſit aliquoties ſumenda, oportet tantùm numerum convenientem ipſi literæ præfigere: Ut ad deſignandum, lineam *a* eſſe bis ſumendam, ſcribo $2a$. Sic & ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipſius *b*, ſcribo $2b$, $3b$, $4b$ &c. Nec aliter fit ſi ad deſignandum ſemiſſem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ *a*, ſcribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri ſolet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. ſic & duas tertias, tres quartas, &c. ipſius *b*, ita deſignaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel ſic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Jam cum in univerſa Matheſi operationes omnes ad quinque diverſas (vulgò Species dictas) reduci poſſint, quæ ſunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum extractio; conſequens eſt ut oſtendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas ſint inſtituendæ.

De Additione quantitatum ſimplicium.

IGitur ad addendum lineam *a* ad lineam *a*, ſcribo pro ſumma $2a$: ſic & ad addendum $2b$ ad $3b$, ſcribo $5b$. Lineæ enim eiſdem literis ſi denotantur, oportet tantùm numeros præfixos addere, & ſummam eidem literæ præfigere. Si verò diverſæ fuerint, additio fiet interpoſito ſigno $+$, quod denotat plus. Ut ſi ad lineam *a* ſit addenda linea *b*, ſcribo $a+b$, hoc eſt, *a* plus *b*, quo incidatur *b* eſſe additam ipſi *a*, vel adhuc eſſe addendam. Ubi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, ſeu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, ſi plures in unam ſummam ſunt colligendæ. Ut ad addendum $2b$, b, & $3b$, ſcribo $6b$. Sic & ad addendùm *a*, *b*, & *c*, ſcribo $a+b+c$.

Exempla additionis simplicium.

				2b.
Add. { a.	2b.	3d.	b.
{ a.	3b.	d.	3b.
Summa	2a.	5b.	4d.	6b.

				a.
Add. { a.	a.	3c.	b.
{ b.	2b.	4d.	c.
Summa	a+b.	a+2b.	3c+4d.	a+b+c.

Ubi notandum, in additione literarum *d* & 3 *d*, cogitandum esse literam *d* sibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in sequenti exemplo & similibus est observandum: ut &, cùm plures adduntur diversæ literæ, perinde esse quo ordine scribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

De Subtractione quantitatum simplicium.

IAm verò ad subtrahendum lineam 2 *a* à linea 5 *a*, scribendum est 3 *a*: siquidem lineæ, quæ iisdem literis sunt designatæ, subducuntur, subtrahendo tantùm à se invicem numeros præfixos. Sic & si 2 *b* auferantur à 3 *b*, reliquum erit 1 *b* seu *b*. Similiter sublato *d* de 4 *d*, relinquitur 3 *d*: At *a* de *a* manet o seu nihil.

Quòd si verò lineæ diversis literis notatæ fuerint, subductio fiet interposito signo —, quod denotat minus. Ut si ab *a* subtrahenda sit *b*, scribo $a-b$, hoc est, *a* minus *b*, quo indicatur *b* esse sublatam ex *a*, vel adhuc esse subducendam. Ubi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, hoc est, quæ ex priori est subtrahenda.

Eodem modo, sublatis 4 *d* ex 3 *c*, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla subtractionis simplicium.

Ex	5a.	3b.	4d.	a.	Ex	a.	3c.	a.	2c.
subtr.	2a.	2b.	d.	a.	subtr.	b.	4d.	4b.	d.
reliq.	3a.	b.	3d.	o.	reliq.	a—b.	3c—4d.	a—4b.	2c—d.

Unde notandum, in ejusmodi quantitatum subtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia subtrahi debet, esse minorem:

hoc eſt, ad ſubtrahendum b ex a, (ut in ſuperiori exemplo) opùs eſſe, ut b ſit minor quàm a. Quòd ſi autem non proponatur aut conſtet, utra quantitas ſit major aut minor, & tamen ſubductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a = b$, hoc eſt, $a - b$ vel $b - a$.

De Multiplicatione quantitatum ſimplicium.

Porrò ad multiplicandum lineam a per lineam b, ſcribo $a b$ vel $b a$. Sic & ad multiplicandum a per a, hoc eſt, a in ſe, ſcribo $a a$ ſeu a^2: & aaa ſeu a^3 ad prædictum productum $a a$ adhuc ſemel multiplicandum per a. Adeò ut literæ immediatè ſeſe conſequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam eſſe, indicent. Non ſecus, ſi multiplicare velim a, b & c per invicem, ſcribo $a b c$, vel $b a c$, vel $c b a$ &c: & $a b b$ ſeu $a b^2$ vel $b^2 a$, ad multiplicandum a, b, & b. Hîc enim, ut in additione, non refert, quo ordine ſcribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in ſe, id quod producitur vocatur Quadratum ejuſdem numeri, & ſi productum illud adhuc ſemel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipſius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque ſi a multiplicetur per a, productum $a a$ ſeu a^2 appellari conſuevit a quadratum, ſeu a duarum dimenſionum; & ſi $a a$ rurſus multiplicetur per a, producetur $a a a$ ſeu a^3, quod ideo appellari poterit a cubus, ſeu a trium dimenſionum: atque ita a^4, a^5, a^6, &c. dici poterunt a quadrato-quadratum, a ſurdeſolidum, a quadrato-cubus, &c. ſeu, a habens 4, 5, aut 6, &c. dimenſiones.

Sicuti autem numerus aliquis, ſi in ſe ducatur, dicitur radix quadrata iſtius producti ſeu quadrati: & ſi adhuc ſemel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus poſterioris producti appellatur, &c; ſic & a dicitur radix Quadrata ex $a a$ ſeu a^2, & radix Cubica ex a^3, & radix Quadrato-Quadrata ex a^4, & radix Surſolida ex a^5, & radix Quadrato-Cubica ex a^6, atque ita porrò. Idem de reliquis eſt intelligendum.

Ex quibus conſtat diligenter eſſe notandum, quòd magnum ſit diſcrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus eſt, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo eſt adſcriptus. Ut inter $2 a$ & a^2, $3 a$ & a^3, $4 a$ & a^4, &c. ſiquidem

per

per $2a$, $3a$, $4a$, &c. ſimpliciter intelligitur quantitas a bis, ter, quater, &c. ſumpta, hoc eſt, a ſibi ipſi toties addita: at verò per a^2, a^3, a^4, &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipſius a, hoc eſt, ipſa quantitas a toties poſita & multiplicata.

Exempla multiplicationis ſimplicium.

Multipl.	a.	a	aa	ab	ab	ab	aa	a^3.
per	b.	a	a	c	b	cd	ab	a^3.
productum	ab.	aa.	a^3.	abc.	abb.	$abcd$.	a^3b.	a^6.

Ubi notandum in a^3b, producto multiplicationis quantitatum aa & ab, numerum ternarium quantitatem præcedentem a reſpicere, non autem ſequentem b: quod, cum brevitatis causâ ſcribatur pro $aaab$, in omnibus ſimilibus caſibus quoque eſt intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3, hoc eſt, aaa per a^3 ſeu aaa, producetur a^6, hoc eſt, $aaaaaa$.

Quòd ſi quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, ſive integri ſive fracti, præfiguntur, oportebit dictos numeros in ſe invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exſurgit ex multiplicatione quantitatum dictarum. Ut ad multiplicandum $2a$ per $3b$; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod ſi præfigatur ipſi ab, producto quantitatum a & b per invicem, erit quæſitum productum $6ab$. Similiter multiplicatis $2b$ per c, productum erit $2bc$. nam unitas, quæ hîc ipſi c præfigi ſubintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Nec aliter fit, ſi ad multiplicandum $3ab$, hoc eſt, ter ab per $2cd$, hoc eſt, bis cd, ſcribatur $6abcd$. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc eſt, ſemiſſe ipſius aa per tertiam partem ipſius ab, productum fiet $\frac{1}{6}a^3b$, hoc eſt, $\frac{1}{6}aaab$.

Exempla multiplicationis.

Multipl.	$2a$	$2b$	$\frac{3}{2}a$	$3ab$	$\frac{1}{2}aa$	a^3	$6a^3$.
per	$3b$	c	$\frac{1}{2}d$	$2cd$	$\frac{1}{3}ab$	$3b^3$	$\frac{2}{3}a^3$.
product.	$6ab$.	$2bc$.	$\frac{3}{4}ad$.	$6abcd$.	$\frac{1}{6}a^3b$.	$3a^3b^3$.	$4a^6$.

Ubi tandem ſciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimenſionum ſeu literarum; earum

tamen additionem atque ſubtractionem non aliter fieri atque præcedentium. Ut ad addendum $2ab$ ad $3ab$, ſcribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, ſcribitur $6ab + 2bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2ab$ de $3ab$, ſcribitur ab: & ad ſubtrahendum $2bc$ de $6ab$, ſcribitur $6ab - 2bc$. Et ſic de aliis.

De Diviſione quantitatum ſimplicium.

QUoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab ſeu ba per a, opùs tantùm eſſe ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem b. Eodem modo, ſi dividatur aa per a, orietur a; & aaa ſeu a^3 per a, orietur aa. Non ſecus diviſâ abc per a, fiet bc: at per b, fiet ac: & per c, fiet ab.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla diviſionis ſimplicium.

$$\begin{matrix}\text{Divid.}\ ab \\ \text{per}\ \ a\end{matrix}\Big\}\, b\ \text{quot.}\quad \begin{matrix} aa \\ a\end{matrix}\Big\}\, a.\quad \begin{matrix} a^3 \\ a\end{matrix}\Big\}\, aa.\quad \begin{matrix} abc \\ a\end{matrix}\Big\}\, bc.\quad \begin{matrix} abc \\ ab\end{matrix}\Big\}\, c.\quad \begin{matrix} a^3b \\ ab\end{matrix}\Big\}\, aa.\quad \begin{matrix} a^5 \\ aa\end{matrix}\Big\}\, a^3.$$

$$\begin{matrix}\text{Divid.}\ 6ab \\ \text{per}\ \ 2a\end{matrix}\Big\}\, 3b.\quad \begin{matrix} \frac{1}{6}a^3b \\ \frac{1}{3}ab\end{matrix}\Big\}\, \tfrac{1}{2}aa.\quad \begin{matrix} 3a^3b^3 \\ 3b^3\end{matrix}\Big\}\, 1a^3\ \text{ſeu}\ a^3.\quad \begin{matrix} 3a^3b^3 \\ a^3\end{matrix}\Big\}\, 3b^3.$$

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Ut ad dividendum ab per c, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur ab eſſe diviſam per c, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum a per b, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ abc per de, quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hîc obiter notandum, diviſis a per a, $2b$ per $2b$, ſimilibúſve, quotientem eſſe 1: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideoque per ſeipſam diviſa, unitatem profert.

DE

DE LOGISTICA QUANTITATUM COMPOSITARUM.

EXplicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & ſubtractione oriuntur quantitates, per ſignum + compoſitæ, aut per ſignum — disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compoſitæ dicuntur); conſequens eſt, ut harum quoque operationem deinceps oſtendamus.

De Additione quantitatum compoſitarum.

IGitur ad addendum quantitates Compoſitas, iiſdem literis notatas, oportet conſiderare ſigna + & —, quibus afficiuntur, & notare, ſi eadem fuerint, additionem fieri ut in ſimplicibus, & earum ſummæ præfigi idem ſignum. Ut ad addendum $a + 3b$ ad $a + 2b$: additis a ad a, & $3b$ ad $2b$, ſumma erit $2a + 5b$. Eodem modo $2a - b$ additum ad $3a - 3b$, facit ſummam $5a - 4b$.

Quòd ſi verò ſigna diverſa fuerint, ſubtrahendæ erunt quantitates eiſdem literis denotatæ, ſicut in ſubtractione ſimplicium, & ei quod relinquitur præfigendum eſt ſignum, quo major quantitas afficitur. Ut ſi addendum ſit $3b + 5a$ ad $2b - 2a$: additis $3b$ ad $2b$, & ſubtractis $2a$ ex $5a$, ſumma erit $5b + 3a$. Similiter ſi $a + d$ addatur ad $a - 4d$, fiet ſumma $2a - 3d$. Ubi patet ſi $2b + a$ addatur ad $3b - a$, ſummam fore $5b$: quantitates enim $+a$ & $-a$, cum propter diverſa ſigna ſint ſubtrahendæ, ſe mutuò tollunt.

Jam ad addendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet tantùm eas ſuis ſignis connectere. Ut ad addendum $a + b$ ad $c - d$, ſcribo $a + b + c - d$: ſiquidem quantitas c, & omnis alia cui nullum præponitur ſignum, intelligitur ſibi præfixum habere ſignum +.

Exempla additionis compoſitarum.

Add.	$a + 3b$	$2a - b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}bb$	$a^3 - \frac{5}{4}abc$	$aa + 2a - 3.$
	$a + 2b$	$3a - 3b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}abc$	$aa + a - 6.$
ſumma	$2a + 5b.$	$5a - 4b.$	$ab + bb.$	$\frac{5}{3}a^3 - 2abc.$	$2aa + 3a - 9.$
Add.	$3b + 5a$	$a + d.$	$2b + a$	$aa - 2ab$	$3a^3 - \frac{1}{3}aab$	$aa - 5a + 6.$
	$2b - 2a$	$a - 4d.$	$3b - a$	$aa + ab$	$2a^3 + \frac{1}{2}aab$	$aa + a - 6.$
aggr.	$5b + 3a.$	$2a - 3d.$	$5b.$	$2aa - ab.$	$5a^3 + \frac{1}{6}aab.$	$2aa - 4a.$

Add.	$a + b$	$2aa + 3ab - bb$	$3abc$	$a^3 + 2abb - aab + abc.$
Summa	$c - d$	$5ab - 3aa$	$a^3 - abc$	$a^3 + aab - 3abb - b^3.$
seu aggr.	$a + b + c - d.$	$8ab - aa - bb.$	$a^3 + 2abc.$	$2a^3 - abb + abc - b^3.$

E quibus manifestum fit, (cum ad addendum $3b + 5a$ ad $2b - 2a$, scribi possit $3b + 5a + 2b - 2a$, hoc est, $5b + 3a$: siquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a - 2a$ faciunt $+3a$) quantitates eisdem literis denotatas, quando diversa habent signa, subtrahendas esse, & summæ ascribendum esse signum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compositarum.

PORrò ad subtrahendum quantitates compositas, quæ eisdem literis sunt denotatæ, sciendum est: si signa eadem fuerint, & quantitas è qua subtractio fieri debet, major sit quantitate subducendâ; tum subtractionem fieri ut in simplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum esse idem signum. Ut si subtrahatur $a + 2b$ ex $2a + 5b$: (subtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$,) remanet $a + 3b$. Non secus si subtrahatur $3a - 3b$ ex $5a - 4b$, reliquum erit $2a - b$.

Si verò signa eadem fuerint, & quantitas à qua subtractio fieri debet quantitate subducendâ minor sit; oportet, subtractâ minore ex majore, residuo signum contrarium præponere. Ut si subtrahendum sit $a + 3b$ ab $3a + 2b$: subtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, residuum erit $2a - b$. Similiter, sublatis $a - 3b$ ex $2a - b$, relinquitur $a + 2b$.

Quòd si quantitates iisdem literis designatæ, atque ad subtrahendum propositæ, diversa signa habeant; erunt ipsæ addendæ, ut in simplicibus, & summæ præfigendum signum quantitatis, à qua subductio fieri debet. Ut si velimus subtrahere $a - b$ ex $2a + b$: subtractis a ex $2a$, additisque b ad b, residuum erit $a + 2b$. Eodem modo, $2a + 5d$ subductum à $3a - 2d$, relinquet $a - 7d$.

Cæterùm ad subtrahendum quantitates diversis literis denotatas, oportet quantitates subducendas, variatis signis connectere cum iis, à quibus subductio fieri debet. Ut si subtrahi debeat $c - d$ ab $a + b$; erit differentia seu residuum $a + b - c + d$: variatis nempe signis quantitatum c & d.

Exem-

Exempla ſubtractionis compoſitarum.

Ex	$2a+5b$	$5a-4b$	$\frac{2}{3}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$	$2aa+3a-9.$
Subtr.	$a+2b$	$3a-3b$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$	$aa+2a-3.$
Reliq.	$a+3b.$	$2a-b.$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb.$	$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}abc.$	$aa+a-6.$
Ex	$3a+2b$	$2a-b$	$2aa-ab$	$5a^3+\frac{1}{6}aab-\frac{2}{3}abb$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a+3b$	$a-3b$	$aa-2ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$	$2aa-3a+9.$
Reſid.	$2a-b.$	$a+2b.$	$aa+ab.$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{1}{3}abb.$	$aa+a-3.$
Ex	$2a+b$	$3a-2d$	$8ab-aa$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a-b$	$2a+5d$	$2aa-3ab$	$-2a^3+\frac{2}{3}aab$	$aa+a-3.$
Diff.	$a+2b.$	$a-7d.$	$11ab-3aa.$	$5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3.$	$2aa-3a+9.$
Ex	$a+b$	$2aa-4a$	$3abc$	$a^3+aab-abb-b^3.$	
Subtr.	$c-d$	$aa+a-6$	a^3-abc	$aab-{}^2a^3+c^3-abb.$	
Rel. reſid. ſeu diff.	$a+b-c+d.$	$aa-5a+6.$	$4abc-a^3.$	$3a^3-b^3-c^3.$	

E quibus perſpicuum fit (cum ad ſubtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ ſcribi poſſit $3a+2b-a-3b$, hoc eſt, $2a-b$, ſubtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$) : quantitates eiſdem literis denotatas, quando eadem habent ſigna, ſed quantitates ſubducendæ aliis ſunt majores, ſubtrahendas eſſe, & relicto præponendum eſſe ſignum contrarium.

Similiter, quoniam ad ſubtrahendum $a-b$ ex $2a+b$ ſcribere poſſum $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$, (ſubtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eiſdem literis deſignatæ, cùm diverſa habuerint ſigna, ſint addendæ, & ſummæ præfigendum ſit ſignum ejus, à quâ ſubtractio fieri debet. Quòd autem ſubtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, ſcribendum ſit $2a+b-a+b$, variatis nempe ſignis quantitatum ſubducendarum, inde manifeſtum fit; quòd ad ſubtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote ſubducendo quantitatem a, præponendo ei ſignum —, ut in ſubtractione ſimplicium eſt dictum: at quoniam ſubducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus juſto tollitur, ſiquidem non a abſolutè tollendum proponitur, ſed diminuta quantitate b; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor ſit quàm juſta differentia, quantitate b: adeóque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b, & ſcribere $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$. Et ſic de aliis

De Multiplicatione quantitatum compositarum.

Post hæc, ad multiplicandum quantitates compositas, operatio institui potest ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in se invicem, ut in simplicibus est ostensum, atque producta simul addere. Quod autem ad signa $+$ & $-$ attinet iisdem præfigenda, sciendum est: eadem signa (hoc est $+$ per $+$, vel $-$ per $-$) facere signum $+$, diversa verò (hoc est $+$ per $-$, vel $-$ per $+$) facere $-$. Ut ad multiplicandum $a+b$ per c: multiplicatis $+a$ per $+c$, & $+b$ per $+c$, fiunt $+ac$, & $+bc$: quibus additis, fit productum $+ac+bc$, seu $ac+bc$. Sic si multiplicandum sit $a-b$ per c, producetur $ac-bc$.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum proponatur $a+b$ per $c+d$: multiplicatis enim $a+b$ per c, ut ante; & rursus $a+b$ per d (siquidem $a+b$ non tantùm per c, sed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac+bc+ad+bd$. Non secus ad multiplicandum $a-b$ per $c-d$ scribitur $ac-ad-bc+bd$: multiplicatis nempe primùm $a-b$ per $+c$, fit $+ac-bc$: deinde $a-b$ per $-d$, fit $-ad+bd$. quippe $+a$ per $-d$, producit $-ad$: at $-b$ per $-d$ producit $+bd$, juxta regulam. Et sic de aliis. Nec refert utrùm à dextra an verò à sinistra initium fiat, sicut sequentibus exemplis manifestum fiet.

Exempla multiplicationis compositarum.

Mult.	$a+b$	$a-b$	$a+b$	$a-b$	$a+b$
per	c	c	$c+d$	$c-d$	$a+b$
prod.	$ac+bc.$	$ac-cb.$	$ac+bc$	$ac-bc$	$+ab+bb$
			$+ad+bd$	$-ad+bd$	$aa+ab$
		product.	$ac+bc+ad+bd.$	$ac-bc-ad+bd.$	$aa+{}^{2}ab+bb.$

Multipl.	$a-b$	$a+b$	$aa-2ab+bb$	$aa-ab+bb$
per	$a-b$	$a-b$	$a-b$	$a+b$
	$-ab+bb$	$aa+ab$	$-aab+{}^{2}abb-b^3$	$+aab-abb+b^3$
	$aa-ab$	$-ab-bb$	$a^3-2aab+abb$	$a^3-aab+abb$
prod.	$aa-{}^{2}ab+bb.$	$aa-bb.$	$a^3-{}^{3}aab+{}^{3}abb-b^3.$	$a^3+b^3.$

Mult.	$3dd + 4de + ee$	$2a^3 + \frac{1}{2}aab + \frac{2}{3}abb$
per	$3dd - ee$	$\frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa$
	$9d^4 + 12d^3e + 3ddee$	$-a^5 - \frac{1}{4}a^4b - \frac{1}{3}a^3bb$
	$-3ddee - 4de^3 - e^4$	$+\frac{4}{3}a^4b + \frac{1}{3}a^3bb + \frac{4}{9}aab^3$
product.	$9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4.$	$\frac{13}{12}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5.$

Multipl.	$4a^3 + 3aa - 2a + 1$
per	$aa - 5a + 6$
	$+24a^3 + 18aa - 12a + 6$
	$-20a^4 - 15a^3 + 10aa - 5a$
	$+4a^5 + 3a^4 - 2a^3 + 1aa$
product.	$4a^5 - 17a^4 + 7a^3 + 29aa - 17a + 6.$

Cæterùm advertendum hîc est, non rarò utile esse, multiplicationem hoc modo non instituere; sed tantummodo eam innuere interserendo voculam *in* vel M. Ut ad multiplicandum $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ per $\overline{aa - 5a + 6}$, scribo $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ in $\overline{aa - 5a + 6}$, vel $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ M $\overline{aa - 5a + 6}$.

Quòd autem + per —, vel — per + faciat —, sic patet. Esto $a - b$ multiplicandum per c, & sit $a - b \propto e$: hinc si utrobique addatur b, fiet $a \propto b + e$. Jam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo si utrinque multiplicetur per c, erit $ac \propto bc + ec$, hoc est, auferendo utrinque bc, erit $ac - bc \propto ec$. Quocirca cum statuatur $a - b \propto e$, & utrâque parte ductâ in c, producatur $ac - bc \propto ec$; perspicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter ostendetur — per — multiplicatum producere +. Etenim si $a - b$ multiplicandum sit per $c - d$: ponendo, ut ante, $a - b \propto e$, erit productum ex $a - b$ in $c - d$ æquale producto ex e in $c - d$ vel $c - d$ in e: id est, $ce - de$. Sed ce, ut supra, æquatur $ac - bc$: unde $ac - bc - de$ æquabitur producto ex $a - b$ in $c - d$. Porrò cum $a - b$ æqualis sit posita ipsi e, & utrâque parte ductâ in d, productum $ad - bd$ æquetur producto de: hinc si ex $ac - bc$ subtrahatur $ad - bd$ loco de, ei æquale; erit juxta regulam subtractionis $ac - bc - ad + bd$ productum quæsitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

De Diviſione quantitatum compoſitarum.

PRæterea, ad dividendum quantitates compoſitas, operatio non abſimilis erit ei, quâ in Arithmetica vulgari duo integri numeri per ſe invicem dividuntur. Quod autem ſigna + & — concernit, ſciendum eſt, ſi dividatur + per +, aut — per —, ſemper oriri +; at ſi + per —, vel — per + dividatur, ſemper oriri —. omnino ut in multiplicatione. Operationem autem ſive à dextra ſive à ſiniſtra incipias perinde erit. Ut ad dividendum $ac + bc$ per c: diviſis $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, fiunt ut in ſimplicibus eſt oſtenſum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæſitus erit $a + b$. Similiter ſi dividatur $ac - cb$ per c, orietur $a - b$: diviſis enim $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non diſſimili ratione dividitur $ac + ad + bc + bd$ per $c + d$, & fit $a + b$. Cujus operatio talis eſt.

Divid.	$ac+ad+bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}$ | $+a.$	$\frac{+bc}{+c}$ | $+b.$
per $c+d$)	$\overline{ac+ad+bc+bd}$		
	o o o o		
Quotiens	$+a+b.$		

Diviſo ac per c, (ut in ſimplicibus) fit a, ſcribendum ſub linea in quotiente. hinc multiplicato diviſore $c + d$ per quotientem inventum a, productum $ac + ad$ ex dividendo auferatur, ſcribendo partes ejuſdem denominationis ſub invicem, & reliquum ſub linea infra ductâ. Unde cum ſubducto ac ex ac, & ad ex ad maneat nihil, ſcribitur ſub linea ducta o. Deinde diviſo $+bc$ per $+c$, fit $+b$, aſcribendum priori quotienti. unde multiplicato diviſore $c + d$ per hunc quotientem b, fit productum $+bc + bd$. id quod ſi ſcribatur, ut ante, ſub dividendo, & fiat ſubductio; erit pro reliquo ſub linea ſcribendum o. Et peracta erit diviſio.

Eodem modo ad dividendum	$ac-ad-bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}$	$+a$
per $c - d$:)	$\overline{ac-ad-bc+bd}$		
	o o o o	$\frac{+bc}{+c}$	$-b$
Erit quotiens	$+a-b.$		

Divido primùm ac per c, & fit a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Jam multiplicato diviſore $c - d$ per $+a$, fit productum

ac —

$ac - ad$, ſubducendum ex dividendo, & relinquitur o. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, ſub linea ſcribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato diviſore $c-d$ per $-b$, fit productum $-bc+bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet diviſionem eſſe ad finem perductam, & quotientem eſſe $a-b$.

Sic etiam ad dividendum	$aa - 2ab + bb$	aa	a
per $a-b$:)	$aa - ab$	a	
	$o - ab$	$-ab$	$-b$
	$- ab + bb$	$+a$	
	o o		
fit quotiens	$a-b$.		

Divido primùm aa per a, & oritur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Unde multiplicato diviſore $a-b$ per a, & ablato producto $aa - ab$ ex dividendo, ſcribendum erit reliquum $-ab$ ſub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, ſcribendum ſub linea in quotiente. Tum ducto diviſore $a-b$ in $-b$, fit productum $-ab+bb$, quod ſublatum à reliquo dividendi relinquit o. Et erit operatio finita, ac quotiens quæſitus $a-b$.

Eâdem ratione ſi dividendum ſit $aa - bb$ per $a+b$.

Divid.	$aa - bb$ | $-ab$		aa	a
Diviſ. $a+b$)	$aa - bb$ | $-ab$		a	
	o o o		$-ab$	$-b$
Quotiens	$a-b$		$+a$	

Incipiendo rurſus à primo termino, divido aa per a, & habebitur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Unde multiplicato diviſore $a+b$ per quotientem inventum a, producetur $aa+ab$, quod ſublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hic terminus præter ſuperſtitem $-bb$ ad dividendum huc acceſſit, ideo poſt lineam ei adſcribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum acceſſit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente ſub linea ſcribendum. Quo facto, ſi multiplicetur diviſor $a+b$ per hunc quotientem $-b$, exſurget $-ab-bb$ ad ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum poſt ſubtractio-

nem relinquat o; liquet absolutam esse operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter se res habet si dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiatur ab ultimo termino.

Dividend.	$a^3 + b^3$	$- abb$	$+ aab$	b^3 b	bb
Divisor $a + b$)	$+ a^3 + b^3$	$- abb$	$+ aab$	$- abb$ $+ b$	$- ab$
	o o	o	o	$+ aab$ $+ b$	$+ aa$
Quotiens	$+ aa - ab + bb.$				

Etenim diviso $+ b^3$ per $+ b$, fit $+ bb$, scribendum in quotiente. tum ducto divisore $a + b$ in $+ bb$, producitur $+ abb + b^3$: Id quod si subtrahatur ex dividendo, relinquetur $- abb$. Deinde diviso $- abb$ per $+ b$, oritur $- ab$, scribendum in quotiente, quo multiplicato per divisorem $a + b$ exsurgit $- aab - abb$, ad subtrahendum ex reliquo dividendi, eritque residuum $+ aab$. Denique diviso $+ aab$ per $+ b$, prodibit $+ aa$ scribendum in quotiente. unde si multiplicetur divisor $a + b$ per $+ aa$, & productum $+ a^3 + aab$ auferatur ex residuo dividendi, erit reliquum o. Id quod ostendit, diviso $a^3 + b^3$ per $a + b$, oriri $aa - ab + bb$, quod erat faciendum.

Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem divisionis compositarum.

Dividend.	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	$- b^3$ $- b$	$+ bb$
Divisor $a - b$.)	$+ abb - b^3$		
	$+ 2abb$ o	$+ 2abb$ $- b$	$- 2ab$
	$- 2aab + 2abb$		
	$- aab$ o	$- aab$ $- b$	$+ aa$
	$a^3 - aab$		
	o o		
Quotiens	$+ aa - 2ab + bb.$		

Divi-

Dividend. $9d^4+12d^3e-4de^3-e^4 \,|\, -3ddee$

Divis. $3dd-ee)\ 9d^4+12d^3e-4de^3-e^4 \,|\, -3ddee$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $+4de+3dd+ee$

$-e^4 \,|\, +ee$
$-ee \,|$

$-3ddee \,|\, +3dd.$
$-\ ee \,|$

$-4de^3 \,|\, +4de.$
$-\ ee \,|$

Dividend. $\frac{13}{12}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5 \,|\, -\frac{1}{3}a^3bb$

Divis. $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa)\ +\frac{4}{3}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5 \,|\, -\frac{1}{3}a^3bb$

$-\frac{1}{4}a^4b \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$-\frac{1}{4}a^4b$

0

Quotiens $+\frac{2}{3}abb+\frac{1}{2}aab+2a^3.$

$-\ a^5 \,|\, +2a^3.$
$-\frac{1}{2}aa \,|$

$-\frac{1}{4}a^4b \,|\, +\frac{1}{2}aab.$
$-\frac{1}{2}aa \,|$

$-\frac{1}{3}a^3bb \,|\, +\frac{2}{3}abb$
$-\frac{1}{2}aa \,|$

Divid. $d^4-b^4+2aady+2aaby+aadd-aabb \,|\, -bd^3 \,|\, +bbdd \,|\, -b^3d \,|\, -aabd$ Pag. 340.

Div. $d+b)\ d^4-b^4+2aady+2aaby+aadd-aabb \,|\, -bd^3 \,|\, +bbdd \,|\, -b^3d \,|\, -aabd$ lin. 4.

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $+d^3-bdd+bbd-b^3+2aay+aad-aab.$

$d^4 \,|\, d^3.$ $\quad -bd^3 \,|\, -bdd.$ $\quad +bbdd \,|\, +bbd.$ $\quad -b^3d \,|\, -b^3.$
$d \,|$ $\quad + d \,|$ $\quad + d \,|$ $\quad + d \,|$

$+2aady \,|\, +2aay.$ $\quad +aadd \,|\, +aad.$ $\quad -aabd \,|\, aab.$
$+ d \,|$ $\quad + d \,|$ $\quad + d \,|$

Dividend. $+y^6-8y^4-124yy-64$ Pag. 77.

Divisor $yy-16)\ +y^6+8y^4+4yy-64$

$0-16y^4-128yy \quad 0$

$-16y^4-128yy$

$0 \quad 0$

Quotiens $+1y^4+8yy+4.$

$-64 \,|\, +4.$
$-16 \,|$

$-128yy \,|\, +8yy.$
$-16 \,|$

$-16y^4 \,|\, +1y^4.$
$-16 \,|$

Divi-

Pag. 78. Dividend. $+y^6+aay^4-2ccy^4-a^4yy+c^4yy-a^6-2a^4cc-aac^4 \mid +2aaccyy$

Div. $yy-aa-cc)$ $+y^6-aay^4-ccy^4-2a^4yy+c^4yy-a^6-a^4cc-aac^4 \mid +aaccyy$

$0 \quad +2aay^4-ccy^4+a^4yy \quad 0 \quad 0 \quad -a^4cc \quad 0 \quad +aaccyy$

$+2aay^4-ccy^4+a^4yy \quad -a^4cc \quad +aaccyy$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $+y^4+2aayy-ccyy+a^4+aacc.$

$\frac{+y^6}{+yy} \mid +y^4. \quad \frac{+2aay^4}{+yy} \mid +2aayy. \quad \frac{-ccy^4}{+yy} \mid -ccyy.$

$\frac{+a^4yy}{+yy} \mid +a^4. \quad \frac{+aaccyy}{+yy} \mid +aacc.$

Pag. 380. lin. 15. Dividend. $+\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-{}^4f^4u^4q+{}^4f^3u^4q+ffuuq$

Div. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}f-ffuu+f^3uu)$ $\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-{}^4f^4u^4q+{}^4f^3u^4q \mid +ffuuq$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $+q-4fuuq.$

$\frac{+\frac{1}{4}q}{+\frac{1}{4}} \mid +q. \quad \frac{-fuuq}{+\frac{1}{4}} \mid -4fuuq.$

Quòd si quantitates dividendæ occurrant, quæ præcedenti modo dividi nequeunt, subscribendus erit divisor ipsi dividendo, interjectâ lineolâ, sicut in fractionibus vulgaribus. Ut ad dividendum $ad-ae$ per $d+e$, scribo pro quotiente $\frac{ad-ae}{d+e}$. quo indicatur $ad-ae$ divisum esse per $d+e$, vel adhuc esse dividendum. Sic & si $bb+bd+cc$ dividatur per $b+d$, fit quotiens seu fractio $\frac{bb+bd+cc}{b+d}$, hoc est, $b+\frac{cc}{b+d}$. Quippe sæpe conducit, ut in Arithmetica vulgari, divisionem, quantùm fieri potest, instituere, & quod superest instar fractionis quotienti adscribere. Et tantum de divisione.

DE EXTRACTIONE RADICIS.

QUoniam autem de Radicis Extractione, quæ pro divisionis specie haberi potest, agendum restat, sciendum est, ejus operationem non esse diversam ab illa, quâ in Arithmetica vulgari radix ex dato aliquo numero elicitur.

Etenim

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa, seu a quadratum, cujus radix seu latus dicitur a; sic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rursus a. Similiter cum aa, hoc est, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 seu cubum ex a; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3, fiet a. Et sic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit si ex quantitatibus compositis radix sit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus simplicibus radicis extractio non secus se habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantùm unius sit characteris: ita radix, quantitas existens composita, non aliter extrahetur, ac si ex aliquo numero radix, quæ pluribus constet characteribus, eliceretur.

Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $aa + 2ab + bb$: extraho primùm radicem ex aa, & fit a, quæ in se multiplicata & ab aa ablata relinquit 0. Deinde multiplicato a per 2, divido $+ 2ab$

Quadratum	$aa + 2ab + bb$
	$aa + 2ab + bb$
	0 0 0
Radix	$a + b$
Divisor	$2a$

per $2a$, & fit $+ b$: quod adscribo priori radici inventæ a. Hinc si ducatur $2a$ in b, fit $+ 2ab$, quod sublatum ex $2ab$ relinquit 0. Similiter si multiplicetur b in se, fiet $+ bb$; quâ itidem ex $+ bb$ ablatâ, remanebit 0. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæsita $a + b$. Et sic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compositis.

Quadratum	$a^4 - 2aabb + b^4$
Radix	$aa - bb$
Divisor	$2aa$

Quadratum	$64xx - 160x + 100$
Radix	$8x - 10$
Divisor	$16x$

Quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$

$aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Radix $a + c - b$

Primus divisor $2a$

Secundus divisor $2a + 2c$

Quadratum aa $a + c$

Radix a per 2

$2a + 2c$. secundus divisor.

a a

per 2 a $-2ab$ | $-b$ quot. secundus.

Primus divisor $2a$ aa $+2a$ |

$+2ac$ | $+c$ quotus primus $2a + 2c$

$+2a$ | $-b$

$-2ab - 2bc$.

$2a$ c $-b$

$+c$ c $-b$

$+2ac$ cc. $+bb$

Cubus $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$

Radix $a + b$ $+3aab$ | $+b$.

Divisor $3aa$ $+3aa$ |

Cub. $27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125$ Cub. $27x^6$

$27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3 + 60xx - 150x + 125$ Rad. $3xx$.

$0 \quad 0 + 135x^4 - 180x^3 + 225xx \quad 0 \quad 0$ $3xx$

$+135x^4 - 180x^3 + 225xx$ $3xx$

$0 \quad 0 \quad 0$ $9x^4$.

Radix $3xx - 2x + 5$.   per 3

Primus divis. $27x^4$ $-54x^5$ | $27x^4$. 1. div.

Secundus divisor $27x^4 - 36x^3 + 12xx$ $+27x^4$ | $-2x$ quot. primus.

$-2x$

	$-2x$	$-2x$	$3xx-2x$
$+27x^4$	$-2x$	$-2x$	$3xx-2x$
$-2x$	$+4xx$	$+4xx$	$-6x^3+4xx$
$-54x^5$	$+3xx$	$-2x$	$9x^4-6x^3$
	$+12x^4$	$-8x^3$	$9x^4-12x^3+4xx$
	per 3		per 3
	$+36x^4$.		$27x^4-36x^3+12xx$. Secund. div.

$+135x^4$	$+5$ quotus ſecund.	
$+27x^4$		

	$+5$	$+5$
	$+5$	$+5$
	$+25$	$+25$
	$+3xx-2x$	$+5$
$+27x^4-36x^3+12xx$	$+75xx-50x$	$+125$.
$+5$	per 3	
$+135x^4-180x^3+60xx$.	$+225xx-150x$.	

Cæterùm ſi quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non poſſit, deſignabitur ipſa præfigendo quantitatibus propoſitis ſignum $\surd$. Ut ad extrahendum radicem quadratam ex aq, ſcribo $\surd aq$; quo indicatur radicem quadratam ex aq eſſe extractam, vel adhuc eſſe extrahendam. Sic & $\surd \overline{aa+bb}$ deſignabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq, ſcribo $\surd C. aaq$. Ut & $\surd \overline{C. a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb. Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ ſeu Irrationales, ad modum numerorum ſurdorum ſeu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Ubi notandum, ſignum $\surd$, vocari Signum Radicale, atque in genere uſurpari ad denotandam quamcunque radicem, ſive Quadratam, ſive Cubicam, ſive Quadrato-quadratam, &c; ſed ad illam diſtinguendam, communiter ſcribi $\surd Q$, vel etiam ſimpliciter $\surd$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\surd C$, ad denotandam radicem Cubicam: & $\surd QQ$ ſeu $\surd\surd$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c. quæ radices etiam ſic deſignantur: $\surd$②, $\surd$③, $\surd$④, &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\surd z$, $\surd cc$, $\surd zz$, &c.

DE LOGISTICA FRACTIONVM.

Quandoquidem ex divisione quantitatum simplicium & compositarum ostensum est oriri Fractiones, sicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio easdem leges sequitur atque numerorum fractorum vulgarium; satis erit, si suppositis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quamlibet designetur semper divisionem aliquam esse faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur; facile constat, si numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam designari unitatem. Ut $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & similes. Unde patet, quânam ratione unitas denotari possit in formam fractionis, cujus denominator sit is, qui requiritur.

Quòd si verò ab, $aa-bb$, &c. in formam fractionis designare velimus, oportet tantùm, assumpto ab & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, subscribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porrò si quantitas aliqua, ut a, designanda sit in formam fractionis, cujus denominator ea sit, quæ præscribitur, ut d, aut $a+b$, &c; oportet, multiplicato a per d, aut per $a+b$, scribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, si $a+\frac{aa}{d}$ sit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d, addatur producto ad numerator aa, & summæ $ad+aa$ subscribatur denominator d, habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic &, $\frac{aa}{d}-a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud secus si $a+b$ $+\frac{aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterùm notandum hîc, cum ad dividendum aa per bb, scribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem sive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per divisorem seu denominatorem bb, pro

pro-

producto scribendum esse numeratorem aa. Non secus si $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit bb. Unde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum est a; superest tantùm ut hoc productum adhuc multiplicetur per a, ut habeatur quæsitum productum aa. Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2, fiat 1; hinc multiplicandum tantùm restat 1 per ab, & fit productum quæsitum $1ab$ seu ab. Et sic de aliis.

De Reductione fractionum ad simpliciores.

IAm ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad simpliciorem; elisâ communi literâ c, quæ tam in numeratore quàm in denominatore repetitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab^3}{abc}$: elisis literis a, b, numeratoris atque denominatoris, hoc est, diviso tam ab^3 quàm abc per ab; fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviso aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ ad minores terminos reductum, erit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut supra) diviso aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rursus $-bbc$ diviso per cd, oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$. Sic & $\frac{a^6ccoomm+4a^6ccm^3p}{ooppz^4+4mp^3z^4}$ abbreviatum, facit $\frac{a^6ccmm}{ppz^4}$. Pag. 214. lin. 15.

Non secus $\frac{aac-aad-acd+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$, vel

 aa—

$\frac{aa-ad}{d}$. Nam $aac - aad$ divisum per $cd - dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd + add$ divisum per $cd - dd$, facit $-a$.

Similiter si fuerit $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: divido $a^3 - abb$ per $aa + 2ab + bb$, & relinquitur post divisionem $+2abb + 2b^3$ (nullâ hîc quotientis $a - 2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa + 2ab + bb$ per reliquum $+2abb + 2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$. Hinc cum peracta sit divisio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator $a^3 - abb$ & denominator $aa + 2ab + bb$ per $2abb + 2b^3$, Invenieturque $\frac{aa}{2bb} - \frac{a}{2b}$, pro numeratore,

& $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$, pro denominatore.

hoc est, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb}$. Divisis enim $a^3 - b^3$ per $aa - bb$, relinquitur $abb - b^3$: dein $aa - bb$ per $abb - b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, & peracta est divisio absque reliquo. Quare si dividatur $a^3 - b^3$ & $aa - bb$ per $abb - b^3$,

fiet $\frac{aa}{bb} + \frac{a}{b} + 1$, pro numeratore.

& $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, pro denominatore.

Ideoque si ubique multiplicetur per bb, fiet fractio reducta $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$: Ut & $\frac{x^3 - 25x}{xx + 10x + 25}$ ad $\frac{xx - 5x}{x + 5}$. Et sic de aliis.

Ostensâ igitur ratione, quâ fractiones ad simpliciores reduci possunt, superest ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, sive simplicibus, sive compositis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipsas sine reliquo dividi potest. id quod in sequentibus usum habere patebit. Est autem operatio similis ei, quâ secundùm prop. 36. lib. 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividitur.

Ut, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas aac & cd: conſtitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, ſeu ſimpliciorem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta ſe poſitis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d, atque ex cd in aa: fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ ſine reliquo dividi poteſt per aac & cd.

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per d, aut $cd - dd$ per aa, fiet quantitas quæſita $aacd - aadd$. minima ſcilicet, quæ diviſibilis eſt per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter ſi dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per a facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæſita.

Eâdem ratione ſi datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæſita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et ſic de cæteris.

Quòd ſi verò compertum ſit aut conſtet, duas illas datas quantitates ad ſimpliciores reduci non poſſe, ſed primitivas eſſe; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæſitam. Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad ſimpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cum ſecundùm præcedentia ſcribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæſita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterùm datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipſas abſque reliquo dividi poteſt, hoc modo: Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primùm, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per

$a^3 -$

$a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$. quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifeſtum eſt $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$ eſſe quantitatem quæſitam. Sic & ſi datæ fuerint $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi poteſt per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$, (ut ante), quoniam ipſa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ ſimiliter aliam quæro, ut $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$. quæ cum hîc etiam diviſibilis ſit per reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$ eſſe quantitatem quæſitam. Et ſic de cæteris.

De Reductione fractionum ad eandem denominationem.

QUibus explicatis, facile eſt oſtendere, quâ ratione fractiones diverſæ denominationis reducantur ad fractiones ejuſdem denominationis. Ut ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad eandem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per denominatores aac & cd (ut jam eſt oſtenſum), & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Jam ad inveniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$ per aac & cd, unumquemque ſcilicet ex denominatoribus datis, & quotientes d & aa multiplicentur per numeratores b^3d & a^3 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæſiti b^3dd & a^5, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem denominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$, minimâ nempe quantitate, quæ dividi poteſt per $aac - aad$ & $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, & quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & $a^3 + b^3$, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo ſi $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad eandem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ & $\frac{x^3 - 30xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non ſecus $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$ reductæ ſub eodem denominatore, facient

$$\frac{a^8 - a^7b + a^6bb}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6},$$

$$\frac{a^8 - 3a^7b + 5a^6bb - 6a^5b^3 + 5a^4b^4 - 3a^3b^5 + aab^6}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6},$$

$$\frac{a^8 - a^7b + a^6bb - a^5b^3 - a^3b^5 + aab^6 - ab^7 + b^8}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}, \&$$

$$\frac{a^8 - a^7b + 2a^6bb - 2a^5b^3 + 2a^4b^4 - 2a^3b^5 + aab^6 - ab^7}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}.$$

De Additione & Subtractione fractionum.

ADditio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur, atque additio & ſubtractio numerorum fractorum vulgarium. Etenim ſi fractiones ejuſdem fuerint denominationis, oportet tantùm earum numeratores addere aut ſubtrahere, & ſummæ vel reliquo ſubſcribere denominatorem communem. Ut ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$, ſumma erit $\frac{aa + bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d + e}$ additum ad $\frac{2ae}{d + e}$, facit $\frac{2ad + 2ae}{d + e}$, ſeu $2a$. Non ſecus ſi addantur $\frac{bd}{b + d}$, $d + \frac{bb}{b + d}$, & $a - \frac{dd}{b + d}$, erit ſumma $a + \frac{2bd + bb}{b + d}$.

Quòd ſi fractiones diverſæ denominationis fuerint, reducendæ erunt priùs ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum eſt. Ut ad addendum $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ad $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, fiet ſumma $\frac{x^3 - 30xx + 250x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non ſecus ſi addantur $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$, erit ſumma $\frac{4a^8 - 6a^7b + 9a^6bb - 9a^5b^3 + 7a^4b^4 - 6a^3b^5 + 3aab^6 - 2ab^7 + b^8}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}$.

Jam ad ſubtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, ſcribo pro differentia $\frac{bb - aa}{c}$. Eodem modo ſubductis $\frac{2ae}{d - e}$ à $\frac{2ad}{d - e}$, reliquum erit $\frac{2ad - 2ae}{d - e}$ ſeu $2a$. Similiter $\frac{bd}{b + d}$ de $d + \frac{bd}{b + d}$ relinquit $\frac{dd + bb}{b + d}$.

Nec aliter fit, ſi ſubtrahendum ſit $\frac{b^4}{aac - aad}$ de $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$. Etenim

nim reductis ad eundem denominatorem, si auferatur $\frac{b^4 d}{aacd - aadd}$ de $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$, relinquetur $\frac{a^5 + aab^3 - b^4 d}{aacd - aadd}$. Sic & si tollatur $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ex $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, remanebit $\frac{x^3 - 30xx - 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Eâdem ratione ad subducendum $\frac{aa - ab}{a + b}$ de a, reductâ quantitate a ad denominatorem $a + b$, demptoque $\frac{aa - ab}{a + b}$ de $\frac{aa + ab}{a + b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a + b}$. Non secus si subtrahatur $b + \frac{cc}{b + d}$ de $a + b$, relinquetur $a - \frac{cc}{b + d}$.

De Multiplicatione fractionum.

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem ab per numeratorem de, ut & denominatorem c per denominatorem f (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa - bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b + c}$ producit $\frac{2a^3 b - 2ab^3}{bc + cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non rarò convenit abbreviare quantitates per crucem. Ut ad multiplicandum $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{aa + 2ab + bb}$ per $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$: quoniam $aac - aad - bbc + bbd$ & $cd - dd$ reducuntur ad simpliciores $aa - bb$ & d, ut & $a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$ ad $aa - ab$ & $a + b$; hinc loco multiplicandi $aac - aad - bbc + bbd$ per $a^3 - abb$ multiplico $aa - bb$ per $aa - ab$; & loco multiplicandi $aa + 2ab + bb$ per $cd - dd$ multiplico $a + b$ per d: eritque productum $\frac{a^4 - a^3 b - aabb + ab^3}{ad + bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa - bb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore ipsius $aa - bb$, quoniam numerator $aa - bb$ & denominator $a + b$ reduci possunt ad $a - b$ & 1, hinc multiplicatis numeratoribus inter se, ut & denominatoribus, fiet productum $\frac{a^3 - 2aab + abb}{1}$ seu $a^3 - 2aab + abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - 2b + \frac{bb}{a}$, hoc est, $\frac{aa - ab + bb}{a - b}$ per $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$: quoniam $aa - 2ab + bb$

& $a-b$ reduci possunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis $aa-ab+bb$ per $a-b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3-2aab+2abb-b^3}{a}$ seu $aa-2ab+2bb-\frac{b^3}{a}$.

Similiter si ad multiplicandum proponatur $\frac{xx-5x}{x+5}$ per $\frac{xx-25}{x}$: reductis $xx-5x$ & x ad $x-5$ & 1, itemque $xx-25$ & $x+5$ ad $x-5$ & 1, multiplico tantùm $x-5$ per $x-5$, & fit productum $xx-10x+25$.

Præterea ad multiplicandum $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$: quoniam a per $a-b$ facit $aa-ab$, & $\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$ facit bb; hinc productum quæsitum erit $aa-ab+bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa-ab}{a+b}$ per $aa-bb$, & producetur $a^3-2aab+abb$. cum enim $aa-bb$ fiat ex $a+b$ in $a-b$, & $\frac{aa-ab}{a+b}$ multiplicatum per $a+b$ producat $aa-ab$, superest tantùm multiplicandum $aa-ab$ per $a-b$, ut habeatur $a^3-2aab+abb$.

Denique si multiplicandum sit $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$ per $c-d$, fiet, divisis $cd-dd$ per $c-d$, productum $\frac{a^3-abb}{a}$.

De Divisione fractionum.

AD dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omisso communi denominatore c, divido ab^3 per bb, fietque quotiens ab. Pari ratione si $\frac{a^3-abb}{c-d}$ dividatur per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, orietur $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ seu $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Quòd si denominatores fuerint diversi, reductio ad eandem denominationem fiet, si multiplicatio instituatur per crucem, ut in vulgaribus. Ut ad dividendum $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore a^3-b^3 per posterioris denominatorem c, & hujus numeratore $aa-ab+bb$ per illius denominatorem $a+b$, fiunt a^3c-b^3c & a^3+b^3; hinc quotiens erit $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.

Advertendum autem hîc est, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, sicut etiam denominatores non rarò ad simpliciores terminos reduci posse. Ut ad dividendum $\frac{a^4 - b^4}{aa - 2ab + bb}$ per $\frac{aa + ab}{a - b}$: cum numeratores $a^4 - b^4$ & $aa + ab$ reduci possint ad $a^3 - aab + abb - b^3$ & a, & denominatores $aa - 2ab + bb$ & $a - b$ ad $a - b$ & 1; ideo loco multiplicandi $a^4 - b^4$ per $a - b$, multiplico $a^3 - aab + abb - b^3$ per 1, & fit $a^4 - aab + abb - b^3$; & loco multiplicandi $aa + ab$ per $aa - 2ab + bb$ multiplico a per $a - b$, & fit $aa - ab$. unde quotiens divisionis fit $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ vel $a + \frac{bb}{a}$. Eâdem ratione si $\frac{x^4 - 625}{xx - 10x + 25}$ dividatur per $\frac{xx + 5x}{x - 5}$, orietur $\frac{x^3 - 5xx + 25x - 125}{xx - 5x}$. Nam $x^4 - 625$ & $xx + 5x$ reduci possunt ad $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & x, quin & $xx - 10x + 25$ & $x - 5$ ad $x - 5$ & 1, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & $xx - 5x$.

Porrò ad dividendum $a^3 - 2aab + abb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore dividendi $a^3 - 2aab + abb$, quoniam numeratores $a^3 - 2aab + abb$ & $aa - ab$ reduci possunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $a - b$ per $a + b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa - bb$.

Sic & ad dividendum $aa + \frac{3abb}{a + 4b}$ per $a + b$, hoc est, $\frac{a^3 + 4aab + 3abb}{a + 4b}$ per $\frac{a + b}{1}$: divido $a^3 + 4aab + 3abb$ per $a + b$, & fit $aa + 3ab$, unde quotiens quæsitus fit $\frac{aa + 3ab}{a + 4b}$. Haud aliter, si dividatur $aa - ab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $a + b$. Et $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $xx + 5x$, orietur $\frac{1}{x - 5}$. Ac $a^3 - aab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $aa + ab$. Et denique $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $x + 5$, exsurget $\frac{x}{x - 5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

Cum in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæsitam: hinc si extrahenda sit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam radix

dix

dix quadrata ex $aabb$ eſt ab, & radix quadrata ex cc eſt c, ſcribo pro radice quæſita $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, ſi extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$, fiet $\frac{aa - bb}{a + 2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$: quoniam $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100 - 160x + 64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100 - 160x + 64xx$ eſt $10 - 8x$, & radix quadrata ex 25 eſt 5; erit radix quæſita $\frac{10 - 8x}{5}$ ſeu $2 - \frac{8x}{5}$.

Non ſecus radix cubica ex $\frac{27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125}{x^3 - 9xx + 27x - 27}$ erit $\frac{3xx - 2x + 5}{x - 3}$.

Quòd ſi quæſita radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni ſignum radicale $\sqrt{\ }$. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb} - ac$, ſcribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb} - ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb} - ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx - 4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi poteſt radix, quæ eſt $2b$: ideo quæſita radix ſic quoque ſcribi poterit $\frac{\sqrt{ccxx - 4abbc}}{2b}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa + bb}$, erit $\frac{ab}{\sqrt{aa + bb}}$. Idem de reliquis radicibus eſt intelligendum.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SVRDARVM.

Quemadmodum fractiones oriuntur ex diviſione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram ſine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exſurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem ſequentibus exemplis exponere viſum fuit.

De Reductione quantitatum ſurdarum.

Sciendum itaque, quòd, ſicut ad operationem fractionum diverſæ denominationis oportet priùs ipſas ad eundem denomi-

 nato-

natorem reducere, ita & opùs ſit, quantitates ſurdas, ſi diverſa ſigna radicalia habuerint, reducere ad idem ſignum radicale. Quod fit, ſi ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipſos ſine reliquo dividi poſſit. Ut ad reducendum $\sqrt{aq}$ ſeu $\sqrt{\textcircled{2}}\,aq$ & $\sqrt{C.\,aaq}$ ſeu $\sqrt{\textcircled{3}}\,aaq$ ad idem ſignum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\sqrt{Q}$ & $\sqrt{C}$ denominantur) minimum numerum, qui per ipſos ſine reliquo dividi poteſt, qui eſt 6. Jam cum 6 diviſo per 2 oriatur 3, & per 3 diviſo oriatur 2; hinc aq multiplicandum erit in ſe cubicè, & aaq quadratè; fientque ſub eodem ſigno $\sqrt{QC.\,a^3q^3}$ ſeu $\sqrt{\textcircled{6}}\,a^3q^3$, & $\sqrt{QC.\,a^4qq}$ ſeu $\sqrt{\textcircled{6}}\,a^4qq$. Sic & $\sqrt{ab}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$ ſub eodem ſigno radicali erunt $\sqrt{\sqrt{aabb}}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in ſe reducitur ad aliquod ſignum radicale. Exempli gratiâ, ad reducendum $a+b$ ad idem ſignum radicis cum $\sqrt{aa+bb}$: oportet multiplicare $a+b$ in ſe quadratè, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$. Non ſecus ſi multiplicetur $a+b$ in ſe cubicè, fiet $\sqrt{C.\,a^3+3aab+3abb+b^3}$ ſub eodem ſigno cum $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$. Et ſic de aliis.

Deinde ſciendum, quantitates ſurdas non raró ad ſimpliciores reduci poſſe, tollendò ex ſigno radicali quicquid eſt rationale: nimirum, dividendo quantitates ſub eodem ſigno $\sqrt{}$ comprehenſas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Ut $\sqrt{75aa}$ reduci poteſt ad $5a\sqrt{3}$: nam $75aa$ producitur ex multiplicatione $25aa$ per 3, quarum radices ſunt $5a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, ſi $75aa$ dividatur per quadratum $25aa$, ſub ſigno radicali tantùm ſcribendum ſit 3, hoc modo: $5a\sqrt{3}$. Id quod monſtrat $5a$, hoc eſt, $\sqrt{25aa}$, multiplicatum eſſe per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi poſſit per quadratum aa, & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\sqrt{a^3b+aabb}$ ſcribi queat $a\sqrt{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi poteſt per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix eſt $a+c-b$, & quotiens eſt $ab+bb$;

hinc

hinc loco $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ ſcribi poteſt $a + c - b\sqrt{ab + bb}$.

Non ſecus pro $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ ſcribi poterit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$: *Pag. 31, lin. 9.* reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, poteſt utriuſque numerator dividi per $aamm$, cujus radix eſt am, oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum ſit rationalis, liberabitur à ſigno $\sqrt{}$, extrahendo radicem ex $ppzz$.

Eâdem ratione loco

$\sqrt{C.x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$

ſcribi poteſt $x - 3\sqrt{C.x^3 + 12}$. Et ſic de aliis.

Verùm enimverò quoniam ſæpenumero difficile eſt invenire Quadratum, Cubum, &c. per quod diviſio, ad hanc reductionem neceſſaria, inſtitui poſſit; non inutile fuerit, ſi hoc loco oſtendamus, quâ ratione datarum quarumlibet quantitatum diviſores omnes inveniantur, perinde atque in numeris eſt oſtenſum. vide p. 300.

Ratio inveniendi diviſores omnes quarumcunque datarum quantitatum.

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc eſt, quæ non niſi per unitatem aut ſe ipſam dividi poteſt), & rurſus quotiens per hanc eandem ſive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per ſe ipſam eſt dividenda. Ut ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b + aabb$: divido $a^3b + aabb$ per a, & fit $aab + abb$, id quod rurſus per a diviſum dat $ab + bb$. Jam quia quotiens hic per a ampliùs dividi nequit, divido $ab + bb$ per b, & provenit $a + b$, quæ quantitas eſt primitiva, ideoque per ſe ipſam dividenda. Quibus peractis reſerventur diviſores a, a, b, & $a + b$.

$a^3b + aabb$	$aab + abb$	$ab + bb$	$a + b$	1
a	a	b	$a + b$	

Jam ut ex hiſce diviſoribus inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^3b + aabb$, multiplico primùm a per a, & fit aa. Deinde b per 1, a, & aa, fiuntque b, ab, & aab. Denique multiplico $a + b$ per 1, a, aa, b, ab, & aab, & fiunt $a + b$, $aa + ab$, $a^3 + aab$, $ab + bb$, $aab + abb$, & $a^3b + aabb$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline a. \quad a. \\ \hline aa. \\ \hline b. \quad ab. \quad aab. \\ \hline a+b.\ aa+ab.\ a^3+aab.\ ab+bb.\ aab+abb.\ a^3b+aabb. \end{array}$$

Atque ita divisores omnes erunt 1, a, aa, b, ab, aab, $a+b$, $aa+ab$, a^3+aab, $ab+bb$, $aab+abb$, & $a^3b+aabb$.

Sic & ad inveniendum omnes divisores quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: divido $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$ per quantitatem primitivam $aa+bb$, & fit $a^4-3aabb+b^4$, id quod rursus divisum per quantitatem primitivam $aa+ab-bb$ dat $aa-ab-bb$, quæ quantitas etiam primitiva est, adeoque per se ipsam dividenda. Eruntque divisores reservandi $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $aa-ab-bb$.

$$\begin{array}{r|r|r|l} a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6 & a^4-3aabb+b^4 & aa-ab-bb & 1 \\ aa+bb & aa+ab-bb & aa-ab-bb & \end{array}$$

Ex quibus ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: multiplico primùm $aa+bb$ per $aa+ab-bb$, & fit $a^4+a^3b+ab^3-b^4$. Deinde 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $a^4+a^3b+ab^3-b^4$ per $aa-ab-bb$, fiuntque $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline aa+bb. \quad aa+ab-bb. \\ \hline a^4+a^3b+ab^3-b^4. \\ \hline aa-ab-bb.\ a^4-a^3b-ab^3-b^4.\ a^4-3aabb+b^4.\ a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6. \end{array}$$

Ita ut divisores omnes sint 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, $a^4+a^3b+ab^3-b^4$, $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

Pag. 78, lin. 12.

Eodem modo ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: divido $a^6+2a^4cc+aac^4$ per a, & fit $a^5+2a^3cc+ac^4$, quod rursus per a divisum, dat $a^4+2aacc+c^4$. Jam cum hic quotiens dividi ampliùs non possit per a aut c similémve quantitatem, divido $a^4+2aacc+c^4$ per $aa+cc$, vel, quod hîc idem est, ex $a^4+2aacc+c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa+cc$, quâ denuo per ſeipſam diviſâ, provenit 1. Unde cum diviſores reſervati ſint a, a, $aa+cc$, & $aa+cc$; ideo ut ex iis inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: multiplico primùm a per a, & fit aa: deinde 1, a, & aa per $aa+cc$, fiuntque $aa+cc$, a^3+acc, & a^4+aacc: ac denique $aa+cc$, a^3+acc, & a^4+aacc per $aa+cc$, & fiunt $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$; eruntque diviſores omnes 1, a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, a^4+aacc, $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$.

$a^6+2a^4cc+aac^4$	$a^5+2a^3cc+ac^4$	$a^4+2aacc+c^4$	$aa+cc$	1
a	a	$aa+cc$	$aa+cc$	

1.

$a.\quad a.$

$aa.$

$aa+cc.\ a^3+acc.\ a^4+aacc.$

$aa+cc.\ a^4+2aacc+c^4.\ a^5+2a^3cc+ac^4.\ a^6+2a^4cc+aac^4.$

Similiter ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$: quia, factâ diviſione per b, oritur $a^3-aab+2aac+acc-abb+bcc-2bbc+b^3$, & hujus quotientis per $a+b$, oritur $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, & radix quadrata ex $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$ eſt $a+c-b$, hoc eſt, $aa-2ab-2ac-2bc+cc+bb$ diviſum per $a+c-b$, dat $a+c-b$; divido demum $a+c-b$ per $a+c-b$, & fit 1. Unde cum diviſores reſervati ſint b, $a+b$, $a+c-b$, & $a+c-b$; multiplico b per $a+b$, & fit $ab+bb$: tum 1, b, $a+b$, & $ab+bb$ per $a+c-b$, fiuntque $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$: ac denique $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$ per $a+c-b$, fiuntque $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b+aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$. Atque ita diviſores omnes erunt 1, b, $a+b$, $ab+bb$, $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, $aab+abc+bbc-b^3$, $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, a^3+2aac

$+acc - aab - abb + bcc - 2bbc + b^3$, & $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$.

Non ſecus ſi proponatur $a^3bc - ab^3c$, invenientur ex diviſoribus reſervatis $a, b, c, a - b$, & $a + b$ diviſores ſequentes: 1, a, b, ab, c, ac, bc, abc, $a - b$, $aa - ab$, $ab - bb$, $aab - abb$, $ac + bc$, $aac - abc$, $abc - bbc$, $aabc - abbc$, $a + b$, $aa + ab$, $ab + bb$, $aab + abb$, $ac + bc$, $aac + abc$, $abc + bbc$, $aabc + abbc$, $aa - bb$, $a^3 - abb$, $aab - b^3$, $a^3b - ab^3$, $aac - bbc$, $a^3c - abbc$, $aabc - b^3c$, & $a^3bc - ab^3c$.

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum diviſorum ope duæ pluréſve quantitates datæ aliâ ratione, quam ex ſuperioribus facilè fuit colligere, ad ſimpliciſſimos terminos reduci queant. Ut ad reducendum $a^3 - abb$, $aab - b^3$, & $a^3 + aab - abb - b^3$ ad terminos ſimpliciſſimos, eandem cum ipſis rationem habentes; quæro primò (ut ante) omnes cujuſque quantitatis datæ diviſores: eruntque ipſius $a^3 - abb$ diviſores 1, a, $a - b$, $aa - ab$, $a + b$, $aa + ab$, $aa - bb$, & $a^3 - abb$: ipſius autem $aab - b^3$ diviſores erunt 1, b, $a - b$, $ab - bb$, $a + b$, $ab + bb$, $aa - bb$, & $aab - b^3$: at verò ipſius $a^3 + aab - abb - b^3$ diviſores erunt 1, $a - b$, $a + b$, $aa - bb$, $aa + 2ab + bb$, & $a^3 + aab - abb - b^3$. Jam cum inter ipſos tres ſint, qui ſibi invicem reſpondeant, ut $a - b$, $a + b$, & $aa - bb$, quorum ope datæ quantitates ad ſimpliciores reduci poſſunt; hinc ad inveniendum terminos ſimpliciſſimos, divido $a^3 - abb$, $aab - b^3$, & $a^3 + aab - abb - b^3$ per $aa - bb$ (utpote diviſorem pluribus dimenſionibus conſtantem), fiuntque a, b, & $a + b$. Ubi notandum, quantitates propoſitas fore inter ſe primas, ſi nulli ex diviſoribus ſibi mutuò reſpondeant.

Quæ ratio inveniendi diviſores non ineptè quoque adhiberi poteſt ad fractionum abbreviationem. Ut ad abbreviandum

Vide ſupra pag. 22.

$\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: quia tam numerator quàm denominator dividi poteſt per $a + b$, poterit pro $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$ ſcribi $\frac{aa - ab}{a + b}$. Et ſic de cæteris.

Inventis autem omnibus diviſoribus, videndum eſt num aliqui ex ipſis ſint quadrati, vel cubi, &c. qui ſi reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex ſigno radicali.

dicali. Ut quia inter diviſores quantitatis $a^3b + aabb$ reperitur quadratum aa, poterit $\sqrt{a^3b + aabb}$, dividendo per aa, reduci ad $a\sqrt{ab + bb}$.

Sic & cum $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$ pro diviſore habeat quoque quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$, poterit pro
$\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$
ſcribi $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$. Similiter cum numerus 75 inter diviſores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi poteſt per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ ſcribi $2ab\sqrt{300}$ vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd ſi inter diviſores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperiatur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, niſi velis eam in formam fractionis deſignare. Ut quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter diviſores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$, &c.

Sciendum denique, quòd, licèt hæ quantitates omnes per ſe conſideratæ ſurdæ exiſtant, tamen inter ſe collatæ duorum ſint generum: aliæ enim dicuntur Commenſurabiles ſeu Communicantes; aliæ verò Incommenſurabiles ſeu non Communicantes.

Communicantes ſunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter ſe ſunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, ſeu ſicut numerus ad numerum.

Non Communicantes verò ſunt, quarum unius ad alteram relatio non eſt ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoſcendi communicantes à non communicantibus eſt, ſi, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos ſunt reductæ, reperiantur inter ſe eſſe ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Ut $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ ſunt communicantes, quia diviſione per $\sqrt{3}$, maximum earum com-

munem diviſorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa}$ & $\sqrt{9aa}$, hoc eſt, ad $5a$ & $3a$: adeò ut pro $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ ſcribi poſſit $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, quæ inter ſe ſunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3.

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque diviſâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$, ſeu a & b: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter ſe ſunt ut a ad b.

Pag. 31. Similiter communicantes ſunt $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$: quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio eſt, ut $\frac{z}{a}$ ad $\frac{am}{pz}$, ſeu pzz ad aam.

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, habent inter ſe eam rationem, quæ eſt ipſius $x+3$ ad $5-x$. Et ſic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum ſurdarum.

AD addendum vel ſubtrahendum quantitates ſurdas, oportet primùm explorare utrum ſint communicantes nec ne: ſi enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel ſubtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra ſignum radicale reperiuntur. Ut ad addendum $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, ſcribo, additis $5a$ & $3a$, pro ſumma $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro earundem differentia, utpote ſublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo ſi fuerint $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$: addendo & ſubtrahendo a & b, erit ſumma $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$, & differentia $\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter ſi proponatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$, hoc eſt, $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, erit ſumma $\frac{pzz+aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$, & dif-

& differentia $\frac{pzz = aam}{apz}\sqrt{oo + 4mp}$. Nec aliter fit si habeatur $\sqrt{\frac{4aabb - 4aaxx}{bb}}$ vel $\frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx}$ & $\sqrt{bb - xx}$: erit enim summa $\frac{2a + b}{b}\sqrt{bb - xx}$, & differentia $\frac{2a = b}{b}\sqrt{bb - xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4 + 6x^3 + 21xx + 72x + 108}$ & $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37xx - 120x + 300}$, hoc est, $\overline{x + 3}\sqrt{xx + 12}$ & $\overline{5 - x}\sqrt{xx + 12}$, erit summa $8\sqrt{xx + 12}$, eisdemque subtractis, erit differentia $\overline{2x = 2}\sqrt{xx + 12}$. Pag. 173, lin. 18.

Quòd si verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel subtrahi ita ut unam radicem constituant, quocirca addendæ vel subtrahendæ sunt mediantibus signis + & —. unde Binomia & Multinomia exsurgunt. Ut si addendum sit $\sqrt{aa + bb}$ ad $\sqrt{aa - bb}$, scribo pro summa $\sqrt{aa + bb} + \sqrt{aa - bb}$; & ad subtrahendum $\sqrt{aa - bb}$ de $\sqrt{aa + bb}$, scribo pro reliquo $\sqrt{aa + bb} - \sqrt{aa - bb}$. Non secus si addatur $a + b$ ad $\sqrt{aa + bb}$, erit summa $a + b + \sqrt{aa + bb}$; at si subducatur $\sqrt{aa + bb}$ de $a + b$, erit reliquum $a + b - \sqrt{aa + bb}$. Cum enim $a + b$ sit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa + bb}$ quantitas surda, non magis communicantes esse possunt, quàm omnes quantitates surdæ, quæ diversis signis radicalibus designantur. Haud dissimili ratione concludes summam ex $aa + bb + a\sqrt{aa + bb}$ & $aa - bb - b\sqrt{aa + bb}$ esse $2aa + \overline{a - b}\sqrt{aa + bb}$, & differentiam esse $2bb + \overline{a + b}\sqrt{aa + bb}$.

De Multiplicatione quantitatum surdarum.

SI quantitates datæ sunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra signum radicale positis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum sub signo radicali contentum, ut habeatur productum quæsitum. Ut ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per 3, eritque productum quæsitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^4 + aabb}$ per $\sqrt{aabb + b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa + bb}$ per $b\sqrt{aa + bb}$: multiplicato a per b, &

producto ab per $aa+bb$, fiet productum quæsitum a^3b+ab^3. Nec aliter fit si ad multiplicandum proponatur
$\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ per
$\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, per $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit $15+2x-xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum facit $180+24x+3xx+2x^3-x^4$.

Quòd si datæ quantitates non fuerint communicantes, oportet tantùm multiplicare quantitates sub signis radicalibus comprehensas, & producto præfigere commune signum radicale. Si verò signa radicalia diversa fuerint, reducenda priùs sunt ad idem signum, sicut superiùs est ostensum, & deinde operandum, ut jam dictum est. Ut, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$: multiplicatis ab per cd, præfigatur producto $abcd$ signum $\sqrt{}$, & fit productum quæsitum $\sqrt{abcd}$. Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter si multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco priùs $a+b$ ad idem signum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam scribendo hoc pacto: $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit si multiplicandum sit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc est, $a+\sqrt{bc}$ in se: multiplico primùm $a+\sqrt{bc}$ per a, & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$, fitque $a\sqrt{bc}+bc$. quæ producta si addantur, fiet productum quæsitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non secus si multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omissis scilicet tantùm signis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evanescunt: hinc productum quæsitum erit $2bb$.

De Divisione quantitatum surdarum.

SI datæ quantitates sunt communicantes, oportet tantùm dividere quantitates, vel numeros, extra signum radicale positos, &

& quod oritur erit quotiens quæsitus. Ut ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, seu 5 per 3; eritque quotiens quæsitus $\frac{5}{3}$ seu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: divisis a per b, fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non secus $\sqrt{abcc}$ seu $c\sqrt{ab}$ divisum per $\sqrt{ab}$ dat c. Et sic de aliis.

Quòd si communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates sub signis radicalibus comprehensæ, & ei quod oritur præfigendum est commune signum radicale. Ut ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: divisis a^3b-ab^3 per $aa-bb$, fit ab; unde quotiens quæsitus erit $\sqrt{ab}$.

Et quidem si signa radicalia fuerint diversa, reducenda priùs erunt ad idem signum, & deinde operatio instituenda erit, ut jam dictum est. Ut ad dividendum a^3+abb per $\sqrt{a^4+aabb}$: multiplicando a^3+abb in se, fit $a^6+2a^4bb+aab^4$; quare divisâ $\sqrt{a^6+2a^4bb+aab^4}$ per $\sqrt{a^4+aabb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$: multiplico primùm $a+b$ in se, ut fiat sub eodem signo radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2a^3b-b^4}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæsitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$. quippe diviso quadrato per suum latus, oritur latus. Unde si a^3+abb dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, orietur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porrò si dividendum sit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm a^3+abb per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit, ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b, unde quotiens quæsitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non secus si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter si dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab divisâ per a, eadem exoritur quantitas b, quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$: hinc quotiens quæsitus erit b. Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{bbc}{a}$.

Postea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$ divido aa per a, & fit

& fit a, quod multiplicatum per $\sqrt{bc}$ producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc}-bc$. diviso jam $-a\sqrt{bc}$ per a, fit $\sqrt{bc}$, quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur si auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur 0, & absoluta erit divisio, eritque quotiens quæsitus $a-\sqrt{bc}$. Eodem modo $ab-cd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$: & $a^3+bc\sqrt{bc}$ divisum per $a+\sqrt{bc}$, dat $aa+bc-a\sqrt{bc}$: & $aabb-ccdd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$: & $a^3b-abbc$ divisum per $aa+a\sqrt{bc}$, dat $ab-b\sqrt{bc}$: ut & $a^3+abc+\overline{aa-bc}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, dat $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$: quia $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$ seu $\sqrt{cc-2cd+dd}$ dividi nequit, scribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{c-d}$, vel $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{cc-2cd+dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4+b^4}$. Eodem modo si dividatur $a\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, fiet quotiens $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa-bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa-bb}}$: & $aa+\sqrt{abcd}$ per $a+\sqrt{bc}$, facit $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$. Sic etiam ad dividendum $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ per $8\sqrt{xx+12}$, scribitur pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{8\sqrt{xx+12}}$; vel quia $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ producitur ex $15+2x-xx$ in $xx+12$, quadratum nempe ipsius $\sqrt{xx+12}$, fit ut scribi quoque possit $\frac{\overline{15+2x-xx}\text{ in }\overline{xx+12}}{8\sqrt{xx+12}}$, vel breviùs $\frac{\overline{15+2x-xx}}{8}\sqrt{xx+12}$, utpote dividendo $xx+12$ per $\sqrt{xx+12}$. Non aliter si $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ sit dividendum per $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, scribo pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{\overline{x+3}\sqrt{xx+12}}$ seu $\frac{60-12x+5xx-x^3}{\sqrt{xx+12}}$. nam $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ dividi potest per $x+3$, & fit $60-12x+5xx-x^3$; vel quoniam $60-12x+5xx-x^3$ producitur ex $5-x$ in $xx+12$, fit ut etiam scribi possit $\frac{\overline{5-x}\text{ in }\overline{xx+12}}{\sqrt{xx+12}}$ seu $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$.

De Extractione Radicis Quadratæ ex Binomiis.

Modus, quo ex quantitatibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi solet ad inventionem radicis quadratæ ex Binomiis, estque talis:

Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.

Subductis quadratis partium dati Binomii à se invicem, si radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadratæ ex semisse summæ & differentiæ, per signum + vel — dati Binomii connexæ, binæ partes radicis quæsitæ.

Ut ad extrahendum radicem quadratam ex $aa+bc+2a\sqrt{bc}$, subtraho $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4+2aabc+bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4-2aabc+bbcc$, cujus radix quadrata $aa-bc$ addita ad majorem partem $aa+bc$, & ab eadem ablata facit summam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum semisses sunt aa & bc: unde radices quadratæ sunt a & $\sqrt{bc}$, quæ si connectantur per signum +, erit radix quæsita $a+\sqrt{bc}$.

Sic radix quadrata ex $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$ erit $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$. *Pag. 182, lin. 13.*

Eodem modo si extrahenda sit radix quadrata ex $\overline{a+b}\sqrt{ab}+2ab$: subducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^3b+2aabb+ab^3$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^3b-2aabb+ab^3$ radix quadrata $\overline{a-b}\sqrt{ab}$. quæ si addatur & auferatur ex majori parte $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, fiet summa $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{ab}$, unde semissium radices quadratæ constituunt radicem quæsitam $\sqrt{a\sqrt{ab}}+\sqrt{b\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{\sqrt{a^3b}}+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$.

Nec aliter fit cùm extrahitur radix quadrata ex $\overline{a+d}\sqrt{bc}+2\sqrt{abcd}$: etenim subtracto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $aabc+2abcd+bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $aabc-2abcd+bcdd$, cujus radix quadrata est $\overline{a-d}\sqrt{bc}$: hæc ergo si addatur & subtrahatur ex majori parte $\overline{a+d}\sqrt{bc}$, erit summa $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis si radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæsita $\sqrt{a\sqrt{bc}}+\sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{\sqrt{aabc}}+\sqrt{\sqrt{ddbc}}$.

Quòd si, subductis quadratis partium dati binomii à se invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: satiùs erit ipsi binomio signum universale radicis quadratæ præfigere. Ut ad extrahendam radicem quadratam

Pag. 6.

ex $-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ scribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Universales.

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM.

Quoniam ad resolvendum aliquod Problema, id ipsum supponendum est ut jam factum, atque nomina imponenda sunt quantitatibus tum datis, tum quæsitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti a, b, c, &c. pro quæsitis autem posteriores z, y, x, &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitas & incognitas facto discrimine, à se invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi. id quod Æquatio vocatur. Unde cum æquatio nihil aliud sit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè constat, quantitates hasce cognitas & incognitas, prout diversimode sunt affectæ atque dispositæ, diversas efficere posse Æquationum formulas, quæ tamen per sequentes regulas reduci queunt ad hasce similésve species:

$z \infty b$, aut
$zz \infty -az+bb$, aut
$z^3 \infty +azz+bbz-c^3$, aut
$z^4 \infty +az^3+bbzz-c^3z+d^4$, &c.

De Reductione per Additionem.

Vt si habeatur æquatio inter $z-3$ & 12, hoc est, si fuerit $z-3 \infty 12$: quoniam si æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt sunt æqualia; hinc si utrinque addatur $+3$, fiet $z \infty 15$. nam -3 & $+3$ addita faciunt 0.

Sic & si fuerit $z-b \infty 0$, addendo utrinque b, fiet $z \infty b$. Aut si ha-

ſi habeatur $b - z \infty 0$, fiet, addendo utrobique z, $b \infty z$. Et ſi habeatur $zz - aq \infty 0$, erit $zz \infty aq$: ut & ſi $z^3 - aaq$ æquetur 0, fiet $z^3 \infty aaq$, &c.

Non ſecus ſi habeatur $z^4 - az^3 - bbzz \infty d^4 - c^3z$, addendo utrique parti $+ az^3 + bbzz$, fiet $z^4 \infty az^3 + bbzz - c^3z + d^4$.

Ex quibus conſtat, quantitates ſigno $-$ adfectas addi utrique parti, ſi eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur ſub ſigno $+$.

De Reductione per Subtractionem.

Deinde ſi fuerit $z + 3 \infty 12$; quia ſi ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur ſunt æqualia, fit ut, ſubtrahendo utrinque $+ 3$, habeatur $z \infty 9$.

Eodem modo ſi habeatur $zz + az \infty bb$, ſubtracto utrinque $+ az$, fiet $zz \infty - az + bb$.

Similiter $z^3 + 2c^3 \infty azz + bbz + c^3$ reducetur ad $z^3 \infty azz + bbz - c^3$, ſubtrahendo utrinque $+ 2c^3$.

Unde colligitur quantitates ſigno $+$ adfectas ab utraque parte ſubtrahi, eximendo ipſas ex una parte & transferendo in alteram partem ſub ſigno $-$: atque adeò quicquid vel additione vel ſubtractione transfertur, adfici ſigno contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

Porrò ſi ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \infty 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \infty 15$. Sic & ſi habeatur $z \infty \frac{aq}{z}$, invenietur, multiplicando utrinque per z, $zz \infty aq$, &c.

Eodem modo ſi fuerit $\frac{zz}{z-b} \infty a$: quoniam, delendo denominatorem $z - b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipſa pars multiplicatur per $z - b$: hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z - b$, ut habeatur æquatio inter zz & $az - ab$.

Similiter ſi ſit $\frac{zz}{a} \infty \frac{zz - bz + bb}{z}$: quoniam, ſublato denomina-

tore a partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata eſt pars prior per a, & fit zz; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz - bz + bb}{z}$ multiplicare per a, ut habeatur $\frac{azz - abz + abb}{z}$. Unde cum æquatio propoſita reducta ſit ad $zz \infty \frac{azz - abz + abb}{z}$, ſi denuo utraque pars multiplicetur per z, denominatorem poſterioris partis $\frac{azz - abz + abb}{z}$, fiet $z^3 \infty azz - abz + abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pars eſt fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem poſterioris, & numeratorem poſterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem eſt ac ſi binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipſæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Ubi notandum, ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non raro tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Ut ſi fuerit $\frac{z^3}{zz - aa} \infty \frac{az - aa}{z + a}$: reductis denominatoribus $zz - aa$ & $z + a$ ad $z - a$ & 1, fiet $\frac{z^3}{z - a} \infty \frac{az - aa}{1}$. ac proinde, ſi multiplicetur per crucem, invenietur $z^3 \infty azz - 2aaz + a^3$. Similiter ſi habeatur $\frac{aaz - bbz}{z + b} \infty \frac{a^3 - abb}{z}$: reductis numeratoribus $aaz - bbz$ & $a^3 - abb$ ad z & a, habebitur $\frac{z}{z + b} \infty \frac{a}{z}$, ubi, ſi per crucem multiplicetur, fiet $zz \infty az + ab$. Non ſecus ſi habeatur $\frac{azz - bzz}{bb - bz} \infty \frac{aa - ab}{b}$: cum numeratores $azz - bzz$ & $aa - ab$ reduci poſſint ad zz & a, ut & denominatores $bb - bz$ & b ad $b - z$ & 1, fiet $\frac{zz}{b - z} \infty \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exſurget $zz \infty - az + ab$.

Huc etiam refer, cùm integrum æquatur fractioni. Ut ſi habeatur æquatio inter $\frac{az^3 - bz^3}{zz + az + aa}$ & $ab - bb$: ſubſtitutâ enim unitate pro denominatore ipſius integri $ab - bb$, cum $az^3 - bz^3$ & $ab - bb$ reduci poſſint ad z^3 & b, erit æquatio talis

$\frac{z^3}{zz+az+aa} \infty \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \infty bzz + abz + aab$.

Ad hæc si proponatur $\sqrt{z}$ æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque sunt quadrata, cubi, &c; hinc si utraque pars in se multiplicetur quadratè, habebitur $z \infty 25$. Sic & si fuerit $\sqrt{z} \infty \sqrt{5}$: ductâ utrâque parte in se quadratè, fiet $z \infty 5$. Pari ratione si $\sqrt{z}$ æquetur $\sqrt{aab - b}$, erit $z \infty aab - b$. Haud secus si fuerit $\sqrt{C.\, z} \infty \sqrt{C.\, aabb - b}$, fiet, utramque partem in se multiplicando cubicè, $z \infty aabb - b$. Et sic de aliis.

De Reductione per Divisionem.

Postea si detur $zz \infty 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem divisis, proveniunt æqualia, fit ut, si utraque pars dividatur per z, oriatur $z \infty 4$. Sic & si habeatur $z^4 \infty az^3 + bbzz$, dividendo utrinque per zz, fiet $zz \infty az + bb$. Similiter fit, si proponatur $3z \infty 12$: etenim si utrobique dividatur per 3, proveniet $z \infty 4$. Eodem modo si fuerit $az \infty ab$, dividendo utramque partem per a, fiet $z \infty b$. Nec aliter si habeatur $ax - bx \infty bb$, orietur, divisâ utrâque parte per $a - b$, $x \infty \frac{bb}{a-b}$. Haud secus si proponatur $azz + bzz \infty abz + bbz - abb - b^3$: quoniam utraque pars dividi potest per $a + b$, orietur $zz \infty bz - bb$. Sic & si fuerit $azz - bzz \infty aaz - bbz + abc$, dividendo utrinque per $a - b$, fiet $zz \infty az + bz + \frac{abc}{a-b}$, seu $zz \infty \begin{matrix} a \\ +b \end{matrix} z + \frac{abc}{a-b}$. Pag. 149, lin. 27.

Huc referendum quoque est, cùm binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. ostensum, reduci possunt ad simpliciores terminos. Ut si fuerit æquatio inter $az^4 - abz^3 + abbzz$ & $- abz^3 + 2abbzz - 2ab^3z + ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem divisorem $azz - abz + abb$, orietur $zz \infty - bz + bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

Denique ad reducendum $zz \infty 25$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque sunt latera seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, pro-

veniat $z \infty 5$. Sic & ſi fuerit $z^3 \infty 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \infty 5$. Eâdem ratione, ſi habeatur $zz \infty aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \infty a + b$. Nec aliter fit ſi fuerit $zz \infty aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \infty a + \sqrt{bc}$. Non ſecus ſi xx
Pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His ſubjunge ſequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis ſimul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz + 3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz - 3aa}{4}} \infty \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia ſunt, æqualia quoque ſunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in ſe quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}} \infty \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$, & ſubtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo ſcilicet ipſas in alteram partem ſub contrario ſigno, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$ ſola ex una parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \infty \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rurſus utraque pars æquationis in ſe quadratè, ut evaneſcat ſignum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{z^4 - 9a^4}{4}$. Ubi ſi utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac ſubtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm ſignis, erit $\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto, ſi utrinque per eundem multiplicetur, ipſum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aaz^4 \infty 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per a, hoc eſt, a ubique deleatur fitque $4bz^4 - 4az^4 \infty 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas z^4 ex una parte ſola, eritque $z^4 \infty \frac{9a^3bb}{4b - 4a}$. Ubi ſi utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \infty \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & ſi denuo utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur $z \infty \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & ſubtractionem

nem institui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates surdas; & reductionem per divisionem, tam ad deprimendas dimensiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & simplicissimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis constantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæsitam ex data æquatione inveniendam utiles esse possint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta sufficiant.

FINIS.



FRAN-

FRANCISCUS à SCHOOTEN

AD LECTOREM.

NE menda, quæ in edendo hoc opere hucuſque commiſſa deprehendimus, Lectorem in eo evolvendo remorarentur; ſed ipſius ſtudio, quantum in nobis eſſet, ritè conſuleretur: monendum duximus, ut illa in anteceſſum ſic emendare dignetur.

Pag. 19. lin. 16. lege *non abs re*. p. 33. l. 1 & 2 pro $\frac{a}{z}$ ſcribe $-\frac{z}{a}$. ibid. l. 19. pro A P ſcribe A B. ibid. l. ult. clariùs exprimatur linea ſuperducta, quæ vix ac ne vix quidem apparet. Quod & aliis in locis eſt obſervandum. p. 41. l. 7. lege G A. p. 46. l. 15. pro $-ef$ lege $-2ef$. p. 47. l. 14. pro $\frac{2e^3}{dd}$ & $\frac{3bee}{dd}$ ſcribe $\frac{3e^3}{dd}$ & $\frac{4bee}{dd}$. ibid. l. penult. pro $\frac{2y^3}{dd}$ & $\frac{3byy}{dd}$ ſcribe $\frac{3y^3}{dd}$ & $\frac{4byy}{dd}$. p. 67. l. 23. pro Y Z lege Y E. p. 74. in calculo ultimi termini æquationis adhuc ſemel ponendum eſt $-7776n^6$. p. 91. l. 9. pro F A lege L A. p. 298. in margine lege *Reductio*. p. 306. l. 7. pro x^3 lege x^4.

Cæterùm ne locus ſuperſtes hujus paginæ vacuus relinqueretur, viſum fuit hoc loco ſimul indicare ſphalmata, quæ in Exercitationibus noſtris Mathematicis, quas anno 1657 in lucem emiſimus, fuerunt commiſſa, ac poſtmodum à nobis recognita: ut, iis ſequenti modo correctis, Lectoris ſtudium in conſimili argumento abſque mora occuparetur.

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *quæſtio*. p. 163. l. penult. lege *quæſiverim*. p. 193. l. 12 lege *nullæ omnino*. p. 228. l. 3 lege fit $zz - 2aa$. ibid. l. penult. lege *in circumferentia*. p. 295. l. 28 lege *deſcriptio*. p. 317. l. 22 lege *quod eſt rectum*. p. 327. l. 4 lege *Oſtenſo*. ibid. l. antep. lege *ipſa circa*. p. 329. l. 10 pro E G lege E C. p. 347. l. 5 pro E C, E F lege ε C, ε F. p. 361. l. 1 lege *ad E, ita ut A E ſit æqualis A B*. p. 372. l. antep. poſt *Quod*, & p. 393. l. 9 poſt *Quod eo* tolle virgulas. p. 423. l. 15 pro *69* lege *639*. p. 432. l. 7 lege 1634. p. 434. l. ult. & p. 462. l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471. l. 22 lege *in locum xx*. p. 525. lineæ *6, 7, 8, 9*, 10 in locum linearum 2, 3, 4, 5 ſunt ſubſtituendæ, & vice verſâ. p. 527. l. 21 lege *Hæ autem*.

DE
ÆQUATIONUM
Natura, Constitutione, & Limitibus

Opuscula Duo.

Incœpta à

FLORIMONDO DE BEAVNE,

In Curia Blesensi Consiliario Regio;

Absoluta verò, & post mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,
Medicinæ & Mathematum in Regia Academia
Hafniensi Professore publico.



AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
cIↃ IↃc LIX.

SUMMO MUSARUM

MECOENATI

ILLUSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO

DOMINO,

IOACHIMO GERSDORPH

TOPARCHÆ IN TUNDBYHOLM, &c.

EQUITI AURATO,

REGNI DANIÆ SUMMO AULÆ MAGISTRO,

PRINCIPI SENATORI,

REGIÆ MAJESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSI

HOC

SPECIMEN ANALYTICES

NOVO ARGUMENTO

CONSECRAT

OBSEQUIUM.

Quod

QUod jam pridem in votis erat, ſtudii & pietatis meæ experimentum Tibi probari, id recentiſſima Muſarum Algebra interpretabitur. Etſi enim, beneficia maxima, quibus me totamq́ue domum noſtram oneraſti, quàm grato animo exceperim, mihi ipſe ſim teſtis; tamen miſeram eam vitam putavi, cui eſſe gratam probare antea non licuit: id aliquo obſequio, tum ipſi Tibi, tum cæteris omnibus indicatum, maximeq́ue perſpicuum eſſe deſideravi. Neq; æquum eſt, virtutis deprædicationem privatis tantùm parietibus claudi. Inter ingratos etiam annumerantur ii, qui beneficia accepta paucis commemorant; totus Orbis, adhibendus eſt, pietatis noſtræ teſtis & conſcius. Quoniam verò monimentum Tuarum virtutum nulla unquam obſcurabit oblivio; nullum erit tali Heroï dignius genus obſequii, quàm quod nulla tempo-

ris circumſcriptione terminatur. Quocirca hoc opuſculum Algebraïcum opportuniſſimum exiſtimavi, quod meæ perpetuæ obſervantiæ teſtem ſempiternum conſtituerem; in quod haud obſcurè conjicio, nihil ſenectuti, nihil ſucceſſoribus licere. Mirandam Algebræ vim multis verbis exponere ſupervacuum eſt, quippe ſecura demonſtrationis ſuæ, ſemper & pacis & belli ſerviit artibus; in qua hoc eximium eſt, quòd abundantias defectusq; pari momento æſtimet, neque illi, quæ plus habent, magis neceſſaria ſunt, quàm quæ minus; atq; hoc ſuæ ſcientiæ habet monimentum, quod mortales faciunt Virtutis. Verùm, artium & ſcientiarum incrementa, non in ipſarum modo ingenio, ſed etiam in ſuperiorum clementia ſita ſunt; æſtimantur quoque pleraque mortalium pretio, quod libido calumniandi conſtituit; & quis neget, eximium decus, ſæpiùs favoris, quàm vir-

tutis

tutis esse beneficium? unde patrono & defensore iis opus est, sub cujus auspiciis floreant. Algebræ nihil ad augendum fastigium superest, hoc tamen uno modo crescere potest. Te ergo præsertim invocat, cujus cepimus & affectus & judicii experimentum, quantum maximum Musæ capere potuerunt. Indulgentiæ Tuæ propinquum exemplum est Astronomia, quam in Tuo gremio suscepisti, cum naufragium illud observationum Tychonicarum, quas invidiosâ tranquillitate provectas improvisus turbo abstulerat, Tuâ benignitate resarcires. Tuo beneficio patriam receperunt. Taceo literas Græcas, quas majoribus suis ita reddidisti, ut illæ utrum plus Tibi, an Tu illis debeas ambigi possit. Et ut verbo absolvam, Tuæ benevolentiæ usum nec litteris nec hominibus unquam denegasti. Quare illud extremum oro, ut eidem Generositati, cui tribuisti hoc, ut

literas ſuſciperes, attribuas, ut ſuſceptas tuearis ac foveas: atque hoc grati animi, non omnino quale velim, ſed quale poſſum hoc tempore monimentum, favore excipere digneris. Celebratum eſt famâ & acclamatione quantum Aſtronomiam amplificaverit Dania, Tibi verò renaſcentis Aſtronomiæ gratia debetur. Et ſi propoſito annueris, non tam patriæ quàm Tibi debitorem conſtitues etiam Algebram, hoc eſt, Matheſin Univerſalem. Ego florentem virtutis Tuæ gloriam æternam opto, Tibique feliciſſimos annos precatus, in clientelam Tuam receptum eſſe, ſupra humanum ſolatium recreabor.

Ill^æ & Exc^mæ D^ni V^æ

Hafniæ, Anno ∞ IↃC LVII.

Deditiſſimus

ERASMIUS BARTHOLINUS,
Medicinæ & Mathematum Profeſſor Regius.

ERASMI BARTHOLINI
Ad Tractatum de Natura & Constitutione
Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clarissimum Virum

CLAUDIUM HARDY,

Regis Galliæ Consiliarium.

QVamvis sinistra hujus seculi judicia parùm apud me valeant, tamen à divulgandis ejusmodi quemlibet jure absterrerent, quæ diversas hominum censuras vitare nequeunt. Verùm ego alto supercilio spretis calumniis, æquitatis amantior & publicæ utilitatis, proposito desistere nolui, tibiq;, Vir Clarissime, exponere constitui, ea, quæ ad præfationem utilia esse putavi, eò libentius, quò cognoverim amicissimum tibi fuisse, dum in vivis esset, D. De Beaune, in Curia Blesensi Consiliarium Regium. Nam etsi vir hic fuerit pereleganti ingenio, & in tantum laudandus, in quantum intelligi virtus potest; tamen hoc in eo maximum fuit, quòd Mathemata doctissimus, ut tempore æqualis Viro summo D. Des-Cartes, ita Analytices speciosæ peritiâ proximus. Quo momento impulsus, dum Blesiis linguæ Gallicæ exercendæ gratiâ degerem, amicitiam tanti Viri colui, diligenterque eâ familiaritate usus sum, quâ ipse me comiter amplectebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis ferè

sermo-

ſermo, & quoties alterutri de Analyticis ſermocinari volupe, toties noſtra conferri colloquia neceſſe erat. Vnde non obſcurè intellexi, quantis fuerat ingenii dotibus ac ſtudiorum eminens, à quo, ſi publica negotia permitterent, perfectio Algebræ maximè ſperari poſſet. Quare variis precibus hortatus ſum, ut, quæ meditatus erat, publicis deſtinaret uſibus. Verùm ille multa ſibi obſtare, occupationes tam publicas quàm privatas, valetudinem, operas amicorum, ea denique principia, quæ ad intellectum ſuarum meditationum neceſſaria erant, deſiderari innuebat. Tum ego, & meam operam ipſi polliceri paratiſſimam cœpi, & ſignificare conſcriptam eſſe à me Iſagogen Carteſianam, quorum neutrum propoſito moram afferre diutiùs poſſet. Quibus valde recreatus, de edendis operibus ſuis ſeriò cogitabat. Sed, cum Arthriticis doloribus plus ſolito, lecto detineretur, omnem à Mathematicis, ad corporis valetudinem, curam transferre cogebatur. Ego interim ad perluſtrandas reliquas Galliæ provincias avocatus, per aliquod tempus ſubſtiti Flexiæ; unde, cum varia negotia reverti Lutetiam ſuaderent, placuit Caſtrum Bleſenſe tranſire, ut de ſanitate amici certior fierem. Quem in prædio ſuo, cum doloribus Colicis acriter conflictantem, cum deprehendiſſem, & affirmantem parùm proſperâ valetudine ex eo tempore ſe uſum fuiſſe; non mediocriter dolui, egregiis inventis fortunam tam eſſe adverſam: mea verò ſtudia iteratò obtuli, promittens, me bono publico,

ejusque gratiâ, quasvis subiturum molestias. Sed postquam relaxationis morbi nulla affulgeret spes, suspirans valedixi, iterque susceptum ingressus, Lutetiam redii. Vix ibi consueta studia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hospite meo, Viro humanissimo, D. Antonio Marchais, in urbe Blesense tunc linguæ Gallicæ Professore, nunc verò Serenissimi Principis Gastonis, Ducis Aurelianensium, Mathematico, quibus nuntiabatur, ægrum nostrum, oculorum usu privatum fuisse, temporibus solstitii Brumalis, ab acrimonia defluxionis Arthriticæ; exoptasse verò meam præsentiam tanto desiderio, ut de editione cogitationum suarum desperaret, nisi meâ operâ uti posset; adeoque rogasse, nisi grave nimis esset, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarserat eâ tempestate, bellum civile inter Regem Galliæ & Principes consanguineos, sedesque exercitus Principum erat Stampæ, quam obsidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum transeundum esset iis, qui ad Comitatum Blesensem pergunt; ancipiti curâ distractus, constitueram tamen longissimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavensem potiùs iter moliri, quàm spes amici deserere. Quippe ea pars territorii Parisiensis, Rothomagum versùs, tantum militibus vacavit. Cum inexspectato, propter adventum exercitus Lotharingici, solutâ obsidione Stampæ, ager Gastinensis, milite utriusque partis liberaretur, prædonibus tamen infestari vias significatum est.

Quare arreptâ occasione, dissuadentibus amicis, itineri me commisi; parvi æstimans, uno periculo, & amico prodesse, & præclara inventa redimere. Neque primas spes fortuna destituit; quippe emenso periculosissimo itinere, salvus revisi amicum, corpore satis sanum, nisi lumen oculorum rapuisset ægritudo. Sed dubium itineris eventum deterior fortuna excepit; cum in primordio nostrorum operum, forsan quòd diligentius, quàm permitteret anni tempus, Algebraïcis subtilitatibus incumberem, æstate mediâ, summis caloribus, sub Caniculam, in gravissimum morbum ex febri synocho inciderem. Et jam de mea salute desperantibus Medicis, inopinatò animam efflavit Vir Amplissimus D. De Beaune. Nam, cum amico aliquo, qui lecto ejus assiderat, de rebus Analyticis disserentem, subitò destituit vox, deinde totum corpus vitalis calor reliquit, atque evasit perpetuam valetudinem die 19 Augusti, Anno 1652, natus Anno 1601 die 27 Sept. Sic præcipitantibus fatis, fefellit spes omnium mortalitas. Ego cum mihi indicari inconsultum ducerent nostri, dum morbus nondum declinaret, ne ægritudinem aggravarent, non nisi post multum tempus id rescivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi, ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant adversaria, nullam curam mortuo detrectans, quam vivo destinaveram, publicæ utilitatis rationem habiturus. Reluctantibus verò hæredibus, cum alius pecuniâ sollicitasset animos eorum; parum abfuit, quin idem scri-

pta,

pta, qui auctorem, casus traxisset. Ergo omni studio demonstrare occœpi, perituros omnes defuncti conatus nisi mihi traderentur; sparsas chartas, sine ordine, sine numero, sine explicatione, notis & characteribus exaratas supputationes, non ab alio intelligi posse, quàm qui aliquo tempore cum ipso familiariter vixisset. Quibus perpensis, tandem obtinui propositum, sed majori labore, quàm successu. Quippe omnia diligentiùs inspiciens, animadverti plura affectata quàm effecta. Inter tot adversaria solummodo absolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidissem, nisi sumptus, propter copiam figurarum, Bibliopolæ fastidivissent. Tractatûs de Natura & Constitutione Æquationum ne litera quidem extabat, menti tamen D. de Beaune pleraque conformia esse differendo dum licuit cum vivo comperi. Ex iis, quæ de Limitibus Æquationum conscripsi, quædam reperta sunt in adversariis, quibus, cum multa desiderarentur, ultimam manum imponere necesse habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio esset omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clarissime, me rogatu Authoris omnia Gallicè priùs conscripsisse, tibique & aliis perlegenda dedisse & corrigenda; tamen nunc Latinè edere coactus sum, ne diutiùs laterent. Nam etsi tibi, dum in Italia degerem, adeò cordi fuerit horum scriptorum à me tibi relictorum editio, ut sumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debe-

 bunt

bunt posteri; tamen ne in Gallia quidem votum assecutus es. Quocirca, cum Amstelodami iterato prælo subjiceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi, ut hæc unà imprimerentur. Consentiente verò Typographo modò Latinè extarent, placuit Latinam interpretationem in consilium adhibere, & potiùs authoris precibus inobediens, quàm publici negligentior reputari. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violatæ fidei tacitè accusabunt. Subjunxissem alia, quorum vestigia adhuc supersunt in adversariis, sed quædam tanti indigent laboris, ut de restitutione quasi desperem, alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen brevi videbit benevolus Lector, si Typographi obedierint. Interea hisce fruere, tuque Vir Clarissime, judica quid ex meis curis, & difficillimis itineribus, fructus colligi possit, tuum namque judicium erit instar omnium. Quod si tamen & alii confiteantur, hinc non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo ut id Manibus Viri Clarissimi Florimondi de Beaune acceptum referant; errores verò si offenderint, benigne corrigant, meæque humanitati ascribant. Vale.

FLO-

FLORIMONDI DE BEAUNE

PRÆFATIO.

DEcreveram in publicum edere hoſce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo inſequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum graviſſimo ad oculos defluxu, oculorum uſu privatus fui. Vnde propoſito planè deſtitiſſem, niſi D. Eraſmius Bartholinus operam mihi ſuam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione ſepulta jacerent, obtuliſſet. Ejus igitur auxilio hoc opus compoſui, ad quod intelligendum ſuppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes verſatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctiſſimis Franciſci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheſeos Vniverſalis, ſeu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

PRIOR TRACTATVS

DE

NATURA

ET

CONSTITUTIONE

ÆQUATIONUM.

DE

DE NATVRA ÆQVATIONVM.

Caput I.



Ultò faciliùs inveniemus Naturam & Constitutionem Æquationum ex earum generatione & comparatione cum similibus seu ejusdem formæ, quàm conferendo earum radices cum certis mediis Geometricè proportionalibus, ut præstitit Vieta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita disponere libet, ut omnes termini ab una parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipsos ordine, prout gradatim per incognitæ quantitatis dimensiones descendunt. Primum enim terminum vocabimus, ipsam quantitatem incognitam, quæ plurimarum dimensionum existens nullis aliis quantitatibus adficitur; secundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimensione minor est; tertium in quo duabus; & sic deinceps, usque ad terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde, loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, asterisco complebimus, quæ tum sub numero terminorum comprehendentur. Hæc omnia beneficio transpositionis facilè peraguntur.

Ex iis, quæ scripta & commentata sunt in Geometriam Renati des Cartes, nota est methodus cognoscendi, quot haberi possint radices in qualibet Æquatione: nimirum, posse Æquationem tot habere veras radices, quot mutationes signorum continuæ adfuerint, & quoties eadem signa se invicem sequuntur immutata, tot posse reperiri falsas radices: modò in numerum terminorum ii numerentur, qui deficiunt.

Porrò, duas Æquationes similes esse dicimus seu ejusdem formæ, quando in utraque idem est primus terminus, & reliqui termini in utraque similiter sunt affecti; & si in una terminus aliquis abfuerit, ut is quoque absit in altera. Nam cùm similes sunt Æquationes, eandem habebunt constitutionem & naturam, & fieri poterit comparatio seu collatio singulorum terminorum unius cum singulis terminis correspondentibus alterius.

CAPUT II.

De natura & constitutione Æquationum Quadratarum, seu duarum dimensionum.

Quando æquationes hæ sunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas sequentes:

$$xx + lx - mm \propto 0$$
$$xx - lx - mm \propto 0$$
$$xx - lx + mm \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Ad intelligendam naturam & constitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \propto 0$ & $x + c \propto 0$ sequens æquatio: $xx \begin{matrix} -bx \\ +c \end{matrix} - bc \propto 0$. Supponendo igitur c majorem quàm b, eandem habebit formam atque prima propositarum $xx + lx - mm \propto 0$. & per consequens, binæ hæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparationem terminorum secundorum habebimus $c - b \propto l$. Unde discimus, l esse differentiam inter falsam radicem c & veram b; &, cognitâ falsâ c, veram b esse æqualem ipsi $c - l$; &, cognitâ verâ b, falsam c esse æqualem ipsi $b + l$.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum habebimus mm æqualem bc. Unde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b æqualem esse $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falsam c æqualem esse $\frac{mm}{b}$.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $x - b \propto 0$ & $x + c \propto 0$, æquatio $xx \begin{matrix} -bx \\ +c \end{matrix} - bc \propto 0$. In qua si supponamus b majorem quàm c, erit ipsa ejusdem formæ cum secunda proposita $xx - lx - mm \propto 0$. Et per consequens duæ illæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex collatio-

latione secundorum terminorum $c - b \infty - l$, vel $l \infty b - c$. Unde discimus, quòd l est differentia inter veram radicem b & falsam c; & si cognita fuerit falsa c, erit vera b æqualis $l + c$; & si fuerit cognita vera b, falsa c erit æqualis $b - l$.

Porrò, per comparationem postremorum terminorum, habebimus $mm \infty bc$. Unde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b esse æqualem $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falsam c esse $\infty \frac{mm}{b}$.

3 *Propositio.*

Pro tertia supra posita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x - c \infty 0$, æquationem sequentem $xx \begin{matrix} - bx \\ - c \end{matrix} + bc \infty 0$, & habebit eandem formam atque proposita tertia $xx - lx + mm \infty 0$, & consequenter hæ binæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$. Unde discimus, quòd l est summa duarum verarum radicum, & si una earum, exempli gratiâ, c, est cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \infty bc$, hoc est, mm æquale rectangulo sub duabus veris radicibus, quarum si alterutra est nota, exempli gratiâ, c, altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \infty 0$, quæ non est affecta, ipsa oritur ex duabus sequentibus $x - m \infty 0$, & $x + m \infty 0$. Unde sequitur ipsam duas possidere radices, unam veram, alteram falsam, quarum utraque æquatur ipsi m.

CAPUT III.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu tertiæ dimensionis, secundo termino carentium.

OMnes hæ æquationes reducuntur ad tres sequentes formas:

$$x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 * - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 * - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem prioris æquationis propoſitæ, formemus per multiplicationem harum duarum $xx + bx + cc \propto o$ & $x - b \propto o$ hanc æquationem $x^3 * - bbx - bcc \propto o$. Suppoſito autem cc majori quàm bb,
$+ cc$
ipſa eandem habebit formam atque prima propoſita $x^3 * + mmx - n^3 \propto o$. & per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \propto mm$. Unde conſtat, ſi vera radix b cognoſcitur, cc fore æquale $mm + bb$, & conſequenter $xx + bx + mm + bb \propto o$. quæ æquatio duas reliquas radices reſpicit, ac cum vera radice b concurrit ad formandam æquationem propoſitam.

Præterea, factâ comparatione ultimorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$. Unde ſequitur cc eſſe æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto o$ ſimiliter duas reliquas radices reſpicere, & cum vera b concurrere ad formationem propoſitæ æquationis.

2 *Propositio.*

Pro ſecunda æquatione propoſita formetur rurſus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \propto o$ & $x - b \propto o$ æquatio $x^3 * - bbx - bcc \propto o$. Suppoſito autem bb majori quàm cc, ha-
$+ cc$
bebit illa eandem formam atque ſecunda $x^3 * - mmx - n^3 \propto o$, & per conſequens habebunt eandem naturam & conſtitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \propto mm$. Unde conſtat, cc eſſe æquale $bb - mm$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \propto o$ duas reliquas radices concernere. Porrò, ex comparatione duorum poſtremorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$, unde ſequitur cc eſſe æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ ſimiliter ad duas reliquas reſpicere.

3 *Propositio.*

Ad inveniendam naturam & constitutionem tertiæ æquationis propositæ, fiat ex duabus hisce $xx + bx - cc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 * - bbx + bcc \propto 0$, eandem habens formam cum
$- cc$
tertia proposita $x^3 * - mmx + n^3 \propto 0$. Unde & ipsæ eandem habebunt naturam atque constitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + cc \propto mm$. Unde constat, cc æquale esse $mm - bb$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \propto 0$ ad duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$, & per consequens $cc \propto \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \propto 0$ similiter duas reliquas radices concernet.

Caput IV.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas sequentes:

$$x^3 + lxx * - n^3 \propto 0.$$
$$x^3 - lxx * - n^3 \propto 0.$$
$$x^3 - lxx * + n^3 \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + cx + bc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^3 - bxx * - bbc \propto 0$. Et suppositâ c majore
$+ c$
quàm b, habebit ipsa eandem formam cum prima proposita $x^3 + lxx * - n^3 \propto 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione secundorum terminorum $c - b \propto l$, hoc est, $c \propto l + b$. Unde constat, cognitâ

nitâ verâ radice b, æquationem $xx + \begin{matrix} b \\ +l \end{matrix} x + bb + bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum, habebitur $n^3 \infty bbc$. unde ſequitur c eſſe æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ radice b, æquationem $xx + \frac{n^3}{b}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{matrix} -b \\ +c \end{matrix} xx * - bbc \infty 0$. Et ſuppoſitâ b majore quàm c, erit ejuſdem formæ cum ſecunda propoſitarum $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0$, adeoque erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $b - c \infty l$. Unde conſtat, c eſſe æqualem $b - l$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + \begin{matrix} b \\ -l \end{matrix} x + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere.

Porrò per comparationem poſtremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bbc$. Unde ſequitur c eſſe æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, ſi vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{bb}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione formemus ex duabus $xx - cx - bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 \begin{matrix} -c \\ -b \end{matrix} xx * + bbc \infty 0$, quæ habebit eandem formam atque tertia æquationum propoſitarum $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0$, & per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c + b \infty l$. Unde diſcimus, quòd c æquetur $l - b$; &, ſi vera radix b ſit cognita, quòd æquatio $xx \begin{matrix} -b \\ -l \end{matrix} x - bb - bl \infty 0$ ad duas reliquas radices inveſtigandas referri debeat.

Præ-

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \infty bbc$, unde sequitur c æquari $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx - \frac{n^3}{bb}x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inveniendis inservire.

CAPUT V.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, in quibus omnes termini extant.

ÆQuationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes:

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione $xx - cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$, æquatio sequens $x^3 \begin{array}{l}-b\\-c\end{array} xx \begin{array}{l}+dd\\+bc\end{array} x - bdd \infty 0$. atque eandem habebunt naturam & constitutionem. Factâ ergo comparatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$, vel $c \infty l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd + bc \infty mm$, hoc est, $dd \infty mm + bb - bl$, quoniam c est inventa æquari $l - b$. Unde apparet, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l}-l\\+b\end{array} x + mm + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. unde constat, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l}-l\\+b\end{array} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-bc\\+dd\end{smallmatrix} x - bdd \infty 0$. & ſuppoſitâ c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit eandem formam, quam propoſitio ſecunda $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty l$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \infty - mm$, hôc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{smallmatrix}+l\\+b\end{smallmatrix} x + bb + bl - mm \infty 0$ duabus reliquis radicibus inveſtigandis eſſe utilem. Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $bdd \infty n^3$. Unde ſequitur dd fore æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{smallmatrix}+b\\+l\end{smallmatrix} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inſervituram.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione, fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ eadem æquatio $x^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-bc\\+dd\end{smallmatrix} x - bdd \infty 0$. Et ſuppoſitâ b majore quàm c, & bc majore quàm dd, erit ejuſdem formæ cum tertia propoſitarum $x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0$, & conſequenter ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \infty mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore invento ipſius c, erit $dd \infty bb - bl - mm$. Unde conſtat, quòd, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx \begin{smallmatrix}+b\\-l\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+bb\\-bl\\-mm\end{smallmatrix} \infty 0$ ad duas inveſtigandas reliquas adhiberi poſſit. Denique, ex collatione

latione poſtremorum terminorum, habebitur $bdd \infty n^3$. Unde ſequitur, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l} xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0 \\ \;\;\;\; -l \end{array}$ ad duas reliquas quærendas eſſe utilem.

4 *Propoſitio.*

Pro quarta propoſitarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ eadem æquatio $\begin{array}{l} x^3 - bxx - bcx - bdd \infty 0. \\ \;\;\;\;\;\;\; +c \;\;\;\; +dd \end{array}$ Et ſuppoſitâ c majore quàm b, & dd majore quàm bc, erunt ejuſdem formæ ac quarta propoſitio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0$, & conſequenter ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty l$, ſeu $c \infty l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd - bc \infty mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, erit $dd \infty bb + bl + mm$. Unde conſtat, cognitâ vera radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l} xx + bx + bb + bl + mm \infty 0 \\ \;\;\;\;\;\;\;\; +l \end{array}$ duas reliquas radices reſpicere. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. Unde ſequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l} xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0 \\ \;\;\;\; +l \end{array}$ ad indagandas duas reliquas adhiberi poſſe.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione fiat ex multiplicatione $xx - cx - dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ æquatio $\begin{array}{l} x^3 - cxx - ddx + ddb \infty 0. \\ \;\;\;\;\;\; -b \;\;\;\;\; +bc \end{array}$ Et ſuppoſito bc majore quàm dd, erit ejuſdem formæ cum quinta propoſitarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0$, & conſequenter ejuſdem naturæ & conſtitutionis erunt. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum, habebimus $l \infty c + b$, vel $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc - dd \infty mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, erit $dd \infty bl - bb - mm$. Unde diſcimus, cognitâ radice verâ b, æqua-

æquationem hanc $xx - lx - bl + bb + n.m \infty 0$ duabus reli-
$ + b$
quis inveniendis eſſe uſui. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd$. Unde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ radice verâ b, hanc æquationem $xx - lx - \frac{n^3}{b} \infty 0$
$ + b$
duabus reliquis inveniendis inſervire.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione formetur ex duabus $xx + cx - dd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 + cxx - ddx + ddb \infty 0$. Et, ſuppoſitâ
$ - b - bc$
c majori quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitarum $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, ſeu $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum erit $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. Unde conſtat, ſi vera radix b ſit cognita, hanc æquationem $xx + lx - mm \infty 0$, pro duabus reliquis inveniendis
$ + b + bl$
$ + bb$
uſui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb \infty n^3$: & per conſequens $dd \infty \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + lx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad inveſtigandas
$ + b$
duas reliquas utilis erit.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitione formetur ex duabus $x - b \infty 0$ & $xx + cx - dd \infty 0$ æquatio $x^3 + cxx - ddx + ddb \infty 0$. Sup-
$ - b - bc$
poſitâ autem b majore quàm c, habebit ipſa eandem formam cum ſeptima propoſitarum $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione ſecundorum terminorum,
$l \infty b -$

$l \infty b - c$, seu $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm \infty bc + dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bb + bl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx - mm + bb - bl \infty 0$ ad in-

$$\begin{matrix} xx + bx - mm + bb - bl \infty 0 \\ -l \end{matrix}$$

veniendas duas reliquas inservire. Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb \infty n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cùm cognoscitur vera radix b, hæc æquatio $\begin{matrix} xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty 0 \\ -l \end{matrix}$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

CAPUT VI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentium.

HUjus generis æquationes ad tres formas sequentes reducuntur:

$$x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione prioris propositionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $\begin{matrix} x^4 * * + c^3 x - bc^3 \infty 0 \\ -b^3 \end{matrix}$. Supposito verò c^3 majore quàm b^3, habebit ea eandem formam atque prima propositio $x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0$, & per consequens erit ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 + b^3$. unde cognoscimus, quando innotescit vera radix b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 \infty 0$ spectare ad investigationem trium reliquarum radicum.

Præterea, collatis ultimis terminis, fit $p^4 \infty bc^3$: unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas investigandas posse usurpari.

2. Propositio.

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * * \begin{matrix} + c^3 \\ - b^3 \end{matrix} x - bc^3 \infty 0$. Et, si ponatur b^3 major quàm c^3, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 - b^3 \infty - n^3$, hoc est, $c^3 \infty b^3 - n^3$. Unde cognoscimus, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3 \infty 0$, ad tres reliquas radices respicere. Porrò, comparatis inter se terminis ultimis, habebimus $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reliquas radices concernere.

3 Propositio.

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * * \begin{matrix} - c^3 \\ - b^3 \end{matrix} x + bc^3 \infty 0$, & habebit eandem formam atque tertia propositarum $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 + b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3 \infty 0$ ad tres reliquas investigandas adhiberi posse. Præterea ex collatione ultimorum habebitur $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas esse utilem.

CA-

CAPUT VII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio & quarto termino carentium.

ÆQuationes hæ ad sequentes tres formas reducuntur:

$$x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{smallmatrix} +c \\ -b \end{smallmatrix} x^3 * * - b^3c \infty 0$.

Suppositâ vero c majore quàm b, habebit illa eandem formam atque prima propositio $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{smallmatrix} +b \\ +l \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +bl \\ +bb \end{smallmatrix} x + b^3 + bbl \infty 0$ tribus reliquis investigandis inservire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b^3c$. unde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + \frac{p^4}{b^3}xx + \frac{p^4}{bb}x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{smallmatrix} +c \\ -b \end{smallmatrix} x^3 * * - b^3c \infty 0$. Et supponendo b superare ipsam c, habebit illa eandem formam atque secunda propositio $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & collatis secundis terminorum habebimus $-b + c \infty - l$, hoc

 est,

est, $c \infty b - l$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 \substack{+b \\ -l} xx \substack{+bb \\ -bl} x + b^3 - bbl \infty 0$ ad tres reliquas investigandas usurpari posse. Præterea, comparando postremos terminorum, habebimus $p^4 \infty b^3 c$. Unde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tribus reliquis inservire.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione formetur ex duabus $x^3 - cxx - bcx - bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^4 \substack{-c \\ -b} x^3 ** + b^3 c \infty 0$, & erit ejusdem formæ atque tertia propositarum $x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$x^3 \substack{-l \\ +b} xx \substack{-bl \\ +bb} x - bbl + b^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire. Porrò, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \infty b^3 c$, & per consequens $c \infty \frac{p^4}{b^3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 - \frac{p^4}{bb} xx - \frac{p^4}{bb} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas radices investigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminisse æquationum quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus desunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & constitutio eodem modo habetur.

CAPUT VIII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo termino carentium.

ÆQuationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes:

$$x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty o.$$
$$x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty o.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty o.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty o.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + bxx - ccx + d^3 \infty o$ & $x - b \infty o$ hæc æquatio $x^4 * \begin{matrix}-cc\\-bb\end{matrix}\, xx \begin{matrix}+d^3\\+bcc\end{matrix}\, x - bd^3 \infty o$. quæ eandem habebit formam atque prima propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty o$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc + bb$, hoc est, $cc \infty mm - bb$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty n^3 + b^3 - bmm$. Unde comperimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{matrix}+n^3\\-m\end{matrix}\,\begin{matrix}\\+b^3\\-bmm\end{matrix} \infty o$ tribus reliquis indagandis inservire.

Præterea, conferendo inter se terminos ultimos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. Unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{matrix}-mm\\+bb\end{matrix}\, x + \frac{p^4}{b} \infty o$ ad tres reliquas quærendas adhiberi posse.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ per $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{smallmatrix} +ccxx \\ -bb \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} +d^3x \\ -ccb \end{smallmatrix} - d^3b \infty 0$.
Suppoſito verò cc majore quàm bb, & ccb majore quàm d^3, habebit illa eandem formam cum ſecunda propoſitarum $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc eſt, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $-cb^3 + d^3 \infty - n^3$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty bmm + b^3 - n^3$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, æquationem $x^3 \begin{smallmatrix} +bxx \\ +bb \end{smallmatrix} + mmx \begin{smallmatrix} +bmm \\ +b^3 \\ -n^3 \end{smallmatrix} \infty 0$, tribus reliquis inveſtigandis inſervire.

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 \begin{smallmatrix} +bxx \\ +bb \end{smallmatrix} + mmx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas poſſe uſurpari.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * \begin{smallmatrix} +ccxx \\ -bb \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} +d^3x \\ -ccb \end{smallmatrix} - d^3b \infty 0$. Et, ſuppoſito bb majore quàm cc, & ccb majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Unde factâ adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc eſt, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $-n^3 \infty -ccb + d^3$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm - n^3$. unde patet, ſi cognita ſit radix vera b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{smallmatrix} +bbx \\ -m^2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} +b^3 \\ +bm^2 \\ -n^3 \end{smallmatrix} \infty 0$

tri-

tribus reliquis investigandis inservire. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty b d^3$, ac proinde $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice *b*, poterit æquatio $x^3 + bxx + \begin{matrix} bb \\ -mm \end{matrix}\, x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres investigandas usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum formemus ex duabus $x^3 - bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 * + \begin{matrix} cc \\ -bb \end{matrix}\, xx + \begin{matrix} d^3 \\ -ccb \end{matrix}\, x - d^3 b \infty 0$. Et supposito *cc* majore quàm *b*, ac d^3 majore quàm *ccb*, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 * + mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 - ccb$, hoc est, restituendo valorem *cc* inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm + n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice *b*, æquationem hanc $x^3 + bxx + \begin{matrix} mm \\ +bb \end{matrix}\, x + \begin{matrix} b^3 \\ +bmm \\ +n^3 \end{matrix} \infty 0$ tribus reliquis quærendis inservire. Denique, collatis ultimis terminis, erit $d^3 b \infty p^4$; & per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice *b*, hæc æquatio $x^3 + bxx + \begin{matrix} mm \\ +bb \end{matrix}\, x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{matrix} -cc \\ -bb \end{matrix}\, xx \begin{matrix} -d^3 \\ +bcc \end{matrix}\, x + d^3 b \infty 0$. Et supposito *bcc* majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 * - mmxx + n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \infty cc + bb$,

hoc

hoc est, $cc \infty mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty bcc - d^3$; ideoque, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty bmm - b^3 - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 + bxx & - mmx & - bmm & \infty\ 0 \\ & + bb & + b^3 & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

reliquis tribus quærendis inservituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3 b \infty p^4$. Unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 * & + ccxx & - d^3 x & + d^3 b \infty 0. \\ & - bb & - ccb & \end{array}$$

& supponendo cc majus quàm bb, habebit ipsa eandem formam cum sexta propositarum $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erit utraque ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem secundorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - bmm - b^3$. Unde patet, datâ verâ radice b, æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & - n^3 & \infty\ 0 \\ & + bb & + bmm & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

ad trium reliquarum investigationem posse usurpari.

Postremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \infty d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas esse adhibendam.

7 Pro-

7 *Propositio.*

Pro septima propositarum fiat ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 * + ccxx - d^3x + bd^3 \propto 0$. Et sup-

$$- bb \quad - bcc$$

posito bb majore quàm cc, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \propto -bb + cc$, hoc est, $cc \propto bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $n^3 \propto d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto n^3 - b^3 + bmm$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx - n^3 \propto 0$ ad reliquas tres

$$- mm \quad + b^3$$
$$- bmm$$

investigandas utilem esse. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$. unde discimus, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3x - \frac{p^4}{b} \propto 0$

$$- m^2b$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

CAPUT IX.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, quarto termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur omnes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Ad investigandam naturam & constitutionem primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquationem hanc

$$\begin{array}{llll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & * -bbdd \infty 0; \\ & -b & +bc & \end{array}$$

habebitque ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens duæ illæ æquationes ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. unde constat, si cognoscitur verâ radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +bmm \infty 0 \\ & -b & -bl & -bbl \\ & & -bb & -b^3 \end{array}$$

ad reliquas tres investigandas inservire.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & * -ddbb \infty 0. \\ & -b & -bc & \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, & bc majore quam dd, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $-mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & +bbl \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -m^2 & -bm^2 \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas posse adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cùm cognoscitur vera

radix

radix b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l} +\,l \\ +\,b \end{array} xx \begin{array}{l} +\,bl \\ +\,bb \\ -\,mm \end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty\, 0$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty\, 0$ & $x - b \infty\, 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l} +\,c \\ -\,b \end{array} x^3 \begin{array}{l} +\,dd \\ -\,bc \end{array} xx * - bbdd \infty\, 0$. Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty\, 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $-l \infty\, c - b$, hoc est, $c \infty\, b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $-mm \infty\, dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty\, bb + bl - mm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l} +\,b \\ -\,l \end{array} xx \begin{array}{l} +\,bb \\ +\,bl \\ -\,m^2 \end{array} x \begin{array}{l} +\,bbl \\ +\,b^3 \\ -\,bm^2 \end{array} \infty\, 0$ tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty\, bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l} +\,b \\ -\,l \end{array} xx \begin{array}{l} +\,bb \\ +\,bl \\ -\,mm \end{array} x + \frac{p^4}{b}$ pro tribus reliquis usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty\, 0$ & $x - b \infty\, 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l} +\,c \\ -\,b \end{array} x^3 \begin{array}{l} +\,dd \\ -\,bc \end{array} xx * - bbdd \infty\, 0$. Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty\, 0$, ac per consequens duæ illæ æquationes eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $l \infty\, c - b$, hoc est, $c \infty\, l + b$. Dein-

de, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bl + bb$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & + bmm & \infty\ 0 \\ \quad +b & +bl & +bbl & \\ & +bb & +b^3 & \end{array}$$

ad tres reliquas adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad +l & +bl & & \\ & +bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & - ddxx & * + bbdd & \infty\ 0. \\ \quad\ \ -b & +bc & & \end{array}$$

Et supponendo bc majus quàm dd, erit ipsa ejusdem formæ cum quinta propositione $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis secundis terminis, habebimus $l \infty b + c$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, restituendo valorem inventum c, erit $dd \infty bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - bbl & \infty\ 0 \\ \quad +b & +bb & +bmm & \\ & +mm & +b^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bbdd \infty p^4$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad +b & +bb & & \\ & +mm & & \end{array}$$

pro tribus reliquis investigandis inservire poterit.

6 *Pro-*

6 Propoſitio.

Pro ſexta propoſitarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & + c\,x^3 & - ddxx\,* & + bbdd \infty 0. \\ & - b & - bc & \end{array}$$

Supponendo autem c majorem quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitio, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & - mmx & - bmm \infty 0 \\ & + b & + bl & + bbl \\ & & + bb & + b^3 \end{array}$$

tres reliquas radices reſpicere.

Poſtremò, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bbdd$, ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & + b & + bl & \\ & & + bb & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas erit adhibenda.

7 Propoſitio.

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & + cx^3 & - ddxx\,* & + bbdd \infty 0. \\ & - b & - bc & \end{array}$$

Suppoſitâ autem b majore quàm c, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitarum $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb + bl$. unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & - mmx & - bmm \infty 0 \\ & - l & - bl & - bbl \\ & & + bb & + b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire. Denique, comparando poſtremos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$, ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l} +bxx \\ -l \end{array} \begin{array}{l} -mmx \\ -bl \\ +bb \end{array} -\frac{p^4}{b} \infty 0$

ad tres reliquas erit referenda.

CAPUT X.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, tertio termino carentium.

Reducuntur autem hæ æquationes ad ſeptem ſequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

I *Propoſitio.*

Pro natura & conſtitutione primæ propoſitionis, formemus, ex duabus $x^3 - cxx - bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hanc æquationem $x^4 \begin{array}{l} -cx^3 \\ -b \end{array} * \begin{array}{l} +d^3 x \\ +bbc \end{array} - bd^3 \infty 0$, & habebit ipſa eandem formam atque prima propoſitio $x^4 - lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem inventum c, erit $d^3 \infty n^3 - bbl + b^3$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l} -lxx \\ +b \end{array} \begin{array}{l} -blx \\ +bb \end{array} \begin{array}{l} +n^3 \\ +b^3 \\ -bbl \end{array} \infty 0$

ad tres reliquas quærendas adhiberi poſſe. Denique, comparando ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l}-lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}-blx\\+bb\end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres erit referenda.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+cx^3\\-b\end{array} * \begin{array}{l}+d^3x\\-bbc\end{array} - d^3b \propto 0$. Suppoſitis autem c majore quàm b, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque ſecunda propoſitio $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus, $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $d^3 - bbc \propto -n^3$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, erit $d^3 \propto bbl + b^3 - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}+blx\\+bb\end{array} \begin{array}{l}+bbl \propto 0\\+b^3\\-n^3\end{array}$ tribus reliquis inſervire. Poſtremò, per comparationem ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto bd^3$, ac per conſequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l}+lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}+blx\\+bb\end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas inveſtigandas erit utilis.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+cx^3\\-b\end{array} * \begin{array}{l}+d^3x\\-bbc\end{array} - d^3b \propto 0$. Suppoſitis autem b majore quàm c, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat itaque earum adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $d^3 - bbc \propto -n^3$, hoc eſt, reſti-

reſtituendo valorem c inventum, erit $d^3 \propto lbb + b^3 - n^3$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & + lbb & \propto 0 \\ \quad + b & + bb & + b^3 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas eſſe utilem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto d^3 b$, ac per conſequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & + \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ \quad + b & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

4 *Propoſitio.*

Pro quarta propoſitione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & * & + d^3 x & - d^3 b & \propto 0. \\ \quad\; - b & & - bbc & & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & d^3 majore quàm bbc, habebit ipſa eandem formam atque quarta propoſitarum $x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque ſecundis terminis habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto b + l$. Deinde, comparando quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \propto n^3 + b^3 + bbl$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + n^3 & \propto 0 \\ \quad + l & + bl & + b^3 & \\ & & + bbl & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto d^3 b$, ac per conſequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ \quad + l & + bl & & \end{array}$$

tribus reliquis inſerviet.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - cx^3 & * & - d^3 x & + bd^3 & \propto 0. \\ \quad\; - b & & + bbc & & \end{array}$$

ſupponendo autem bbc majus quàm d^3, habebit ipſa eandem formam

quinta

atque quinta propositio $x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bbc - d^3$, hoc est, $d^3 \propto bbl - b^3 - n^3$, substituto nempe valore c invento. Unde patet, cùm innotescit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & - lxx & - blx & - bbl & \propto 0 \\ & + b & + bb & + b^3 & \\ & & & + n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & - lxx & - blx & - \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & + b & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas esse adhibendam.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & - cx^3 * & + d^3 x + bd^3 & \propto 0. \\ & - b & - bbc & \end{array}$$

Suppositâ autem c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \propto d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \propto n^3 - bbl - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + lxx & + blx & - n^3 & \propto 0 \\ & + b & + bb & + bbl & \\ & & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & + b & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres esse referendam.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3+cxx+bcx-d^3 \infty 0$ & $x-b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{smallmatrix}+c\\-b\end{smallmatrix} x^3 * \begin{smallmatrix}-d^3\\-bbc\end{smallmatrix} x + bd^3 \infty 0$. Supponendo autem b majorem quàm c, habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^4-lx^3*-n^3x+p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $c-b \infty -l$, hoc est, $c \infty b-l$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3+bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3-b^3+bbl$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{smallmatrix}+b\\-l\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+bb\\-bl\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}-n^3\\-bbl\\+b^3\end{smallmatrix} \infty 0$ reliquis tribus inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde constat, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 \begin{smallmatrix}+b\\-l\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+bb\\-bl\end{smallmatrix} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

Caput XI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

Reducuntur hæ æquationes omnes ad quindecim sequentes formas:

$$x^4-lx^3+mmxx-n^3x+p^4 \infty 0.$$
$$x^4-lx^3+mmxx+n^3x+p^4 \infty 0.$$
$$x^4-lx^3-mmxx-n^3x+p^4 \infty 0.$$
$$x^4-lx^3-mmxx+n^3x+p^4 \infty 0.$$
$$x^4+lx^3+mmxx-n^3x+p^4 \infty 0.$$
$$x^4+lx^3-mmxx-n^3x+p^4 \infty 0.$$
$$x^4+lx^3-mmxx+n^3x+p^4 \infty 0.$$
$$x^4-lx^3+mmxx-n^3x-p^4 \infty 0.$$

x^4-

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis dignoscendâ fiat ex duabus hisce, $x^3 - cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & + ddxx & - f^3x & + bf^3 \infty 0, \\ - b & + bc & - bdd & \end{array}$$

quæ eandem habebit formam atque prima propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum per collationem quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl - bmm - b^3$. Unde constat, cùm innotescit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & - n^3 & \infty 0 \\ + b & + bb & - bbl & \\ & - bl & + bm^2 & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ + b & + bb & & \\ & - bl & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & - ddxx & - f^3x & + bf^3 \infty 0. \\ - b & + bc & + bdd & \end{array}$$

Suppositis autem bc majore quàm dd, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty bl - bb - mm$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty bbl - b^3 - bmm - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -\,lxx & +\,mmx & +\,n^3 \;\infty\; 0 \\ & +\,b & +\,bb & +\,b^3 \\ & & -\,bl & +\,bmm \\ & & & -\,bbl \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -\,lxx & +\,mmx & -\,\frac{p^4}{b} \;\infty\; 0 \\ & +\,b & +\,bb & \\ & & -\,bl & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$, & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -\,cx^3 & -\,ddxx & -\,f^3x & +\,bf^3 \;\infty\; 0. \\ & -\,b & +\,bc & +\,bdd & \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \infty - n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl + bmm - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc

æqua-

æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & -b\,l\,x & -n^3 \infty 0 \\ & +b & -mm & -bbl \\ & & +bb & -bm^2 \\ & & & +b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty b f^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & -mm\,x & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

4 *Propoſitio.*

Pro quarta propoſitione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -c\,x^3 & -dd\,xx & -f^3\,x & +bf^3 \infty 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

Suppoſitis autem dd majore quàm bc, & bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque quarta propoſitio $x^4 - l\,x^3 - mm\,xx + n^3\,x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl - b^3 - n^3$. Unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & -mm\,x & -bmm \infty 0 \\ +b & & -bl & -bbl \\ & & +bb & +b^3 \\ & & & +n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty b f^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & -mm\,x & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b$, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 & + ddxx & - f^3 x & \\ - b & - bc & - bdd & + bf^3 \infty 0. \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipſa eandem formam atque quinta propoſitarum $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos, habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc eſt, reſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + mmb - bbl - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & + mmx & - n^3 \infty 0 \\ & + b & - bl & - m^2 b \\ & & - bb & + bbl \\ & & & + b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per conſequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & + b & - bl & \\ & & - bb & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & - bx^3 & - bcxx & - bddx & + bf^3 \infty 0. \\ & + c & + dd & - f^3 & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c inven-

invento, erit $dd \infty bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc eſt, reſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} +l \\ +b \end{array} xx \begin{array}{l} +bl \\ +bb \\ -mm \end{array} x \begin{array}{l} -n^3 \\ -bmm \\ +bbl \\ +b^3 \end{array} \infty\, 0$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} +l \\ +b \end{array} xx \begin{array}{l} +bl \\ +bb \\ -mm \end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty\, 0$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$x^4 \begin{array}{l} +c \\ -b \end{array} x^3 \begin{array}{l} -dd \\ -bc \end{array} xx \begin{array}{l} -f^3 \\ +bdd \end{array} x + bf^3 \infty\, 0.$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - b^3 - bbl - n^3$. Unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$x^3 \begin{array}{l} +b \\ +l \end{array} xx \begin{array}{l} -mm \\ +bb \\ +bl \end{array} x \begin{array}{l} -bmm \\ +b^3 \\ +bbl \\ +n^3 \end{array} \infty\, 0$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æqua-

tionem $x^3 \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} xx \begin{array}{l}-mm\\+bb\\+bl\end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres esse referendam.

8 *Propositio.*

Pro octava propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array} x^3 \begin{array}{l}+dd\\+bc\end{array} xx \begin{array}{l}+f^3\\-bdd\end{array} x - f^3 b \infty 0$. Supposito autem bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque octava propositio $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - bbl - n^3 + b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l}-l\\+b\end{array} xx \begin{array}{l}+mm\\+bb\\-bl\end{array} x \begin{array}{l}+bmm\\+b^3\\-bbl\\-n^3\end{array} \infty 0$$ tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}-l\\+b\end{array} xx \begin{array}{l}+mm\\+bb\\-bl\end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

9 *Propositio.*

Pro nona propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array} x^3 \begin{array}{l}+d^3\\+bc\end{array} xx \begin{array}{l}+f^3\\-bdd\end{array} x - f^3 b \infty 0$. Supposito verò f^3 majore quàm bdd, erit ipsa ejusdem formæ cum propositione nona $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per con-

consequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto b + c$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, subrogato valore c invento, erit $dd \propto mm + bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + bmm - bbl$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & + n^3 & \propto 0 \\ + b & + bb & + bmm & \\ & - bl & + b^3 & \\ & & - bbl & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3 b \propto p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & + \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ + b & + bb & & \\ & - bl & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

10 *Propositio.*

Pro decima propositione fiat ex duabus hisce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \propto 0. \\ - b & - bc & - bd^2 & & \end{array}$$

Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque decima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $c - b \propto - l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto - mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bd^3 \propto n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto b^3 - bbl - bmm - n^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \propto 0 \\ - l & - bl & - bbl & \\ & - m^2 & - bmm & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b f^3$. unde conſtat, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ & -l & -bl & & \\ & & +mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

11 *Propoſitio.*

Pro undecima propoſitione fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & -ddxx & +f^3x & -bf^3 & \infty\, 0. \\ & -b & -bc & +ddb & & \end{array}$$

Suppoſitâ autem b majore quàm c, habebit ipſa eandem formam atque undecima propoſitio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb - bl$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebitur $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 - mmb - b^3 + bbl$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & -mmx & +n^3 & \infty\, 0 \\ & -l & -bb & +bbl & \\ & & +bl & -mmb & \\ & & & -b^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, collatis ultimis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & -mmx & +\frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ & -l & -bb & & \\ & & +bl & & \end{array}$$

ad reliquas tres eſſe referendam.

12 *Propoſitio.*

Pro duodecima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b & \infty\, 0. \\ & -b & -bc & -bdd & & \end{array}$$

Suppo-

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque duodecima propositio $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty 0 \\ + l & + bl & + bbl & \\ & + mm & + bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis postremis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ + l & + bl & & \\ & + mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

13 *Propositio.*

Pro decima tertia propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & & \\ - b & - bc & - bdd & - f^3b & \infty 0. \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque decima tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis, habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb - bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \infty f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + b^3 + bbl - bmm$. Unde constat, cognitâ

 verâ

verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 + bxx & - bbx & + b^3 & \infty\, 0 \\ + l & - bl & + bbl & \\ & + m^2 & + n^3 & \\ & & - bm^2 & \end{array}$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ + l & - bl & & \\ & + mm & & \end{array}$$

ad reliquas tres eſſe referendam.

14 *Propoſitio.*

Pro decima quarta propoſitione formemus ex duabus hiſce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty\, 0$ & $x - b \infty\, 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \infty\, 0. \\ - b & - bc & - bdd & & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque decima quarta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty\, 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty b^3 + bbl - bmm - n^3$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty\, 0 \\ + l & + bl & + bbl & \\ & - m^2 & - bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $p^4 \infty f^3 b$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ + l & + bl & & \\ & - m^2 & & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

15 Pro-

15 *Propositio.*

Pro decima quinta & ultima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 & - ddxx & + f^3x & - bf^3 \infty 0. \\ \quad - b & - bc & + bdd & \end{array}$$

Supposità verò c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque decima quinta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, conferendoque secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty 0 \\ \quad + l & + bl & + bbl & \\ & - mm & + n^3 & \\ & & - bm^2 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty f^3b$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ \quad + l & + bl & & \\ & - mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

OBSERVANDA
hic in genere nonnulla.

1. NOtandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationibus supponere æquationes comparatas inter se habuisse æque multas radices, aut veras, aut falsas, aut imaginarias. Et ad dignoscendas imaginarias à reliquis, inserviet Tractatus Dioristicus, quem subjungere animus est.

2. Quòd si diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, patebit,

tebit, mutatis signis terminorum locorum parium, ut 2^{di}, 4^{ti}, &c. non mutatis signis reliquorum, (comprehendendo sub terminorum numero etiam locos vacantes:) secundum terminum semper æquari summæ radicum æquationis, affectarum cum suis signis + & —; tertium verò, summæ productorum earundem radicum, cùm singulæ binæ in se invicem ducuntur: & quartum, summæ productorum multiplicationis, factæ ex singulis ternis, atque sic deinceps.

Unde sequitur, deficiente secundo termino, ipsam falsam summamvè falsarum radicum æquari ipsi veræ vel verarum summæ; &, deficiente tertio termino, productum vel summam productorum ex binis, per signum + vel — designatorum, æquari summæ productorum vel ei, quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario signo afficitur, & sic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x + c \infty 0$ hæc æquatio $xx \begin{array}{l}-b\\+c\end{array} x - bc \infty 0$. Quare mutatis signis secundi termini ac retento signo tertii, habebimus $xx \begin{array}{l}+b\\-c\end{array} x - bc \infty 0$. Unde apparet, $b - c$ esse summam radicis veræ $+b$ & falsæ $-c$; & $-bc$ esse productum ex multiplicatione falsæ $-c$ per veram $+b$.

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx \begin{array}{l}-b\\-c\end{array} x + bc \infty 0$, ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$. Quare mutatis signis secundi termini, retento signo tertii, habebitur $xx \begin{array}{l}+b\\+c\end{array} x + bc \infty 0$. Unde apparet, $+b+c$ esse summam duarum verarum radicum, & $+bc$ esse productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, & $x + f \infty 0$ æquatio sequens: $x^3 \begin{array}{l}-b\\-c\\+f\end{array} xx \begin{array}{l}+bc\\-bf\\-cf\end{array} x + bcf \infty 0$. Quare mutatis signis terminorum loco pari positorum, relinquendo signa reliquorum, habebimus $x^3 \begin{array}{l}+b\\+c\\-f\end{array} xx \begin{array}{l}+bc\\-bf\\-cf\end{array} x - bcf \infty 0$. Unde apparet, secundum termi-

num

num $+b+c-f$ esse summam verarum radicum $+b$, $+c$, & falsæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ esse summam trium productorum $+bc$, $-bf$, & $-cf$, prout singulæ binæ radices in se invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ esse productum multiplicationis trium radicum $+b$, $+c$, & $-f$. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam f æquari summæ duarum verarum $+b$ & $+c$; &, deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, signo $-$ affecta, æquari producto $+bc$, signo $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b\infty 0$, $x-c\infty 0$, & $x-d\infty 0$, quæ sit $x^3-bxx+bcx-bcd\infty 0$. Et mutatis signis locorum parium,

$-c \quad +db$

$-d \quad +dc$

retentis signis reliquorum, habebimus $x^3+bxx+dcx+bcd$.

$+c \quad +bd$

$+d \quad +bc$

Unde perspicimus, secundum terminum $+b+c+d$ esse summam radicum $+b$, $+c$, & $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ esse productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quintum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b\infty 0$, $x-c\infty 0$, $x-d\infty 0$, & $x+f\infty 0$ sequens æquatio $x^4-bx^3+bcxx-bcdx-bcdf\infty 0$. Unde mutatis signis

$-c \quad +bd \quad +bcf$

$-d \quad +cd \quad +bdf$

$+f \quad -bf \quad +cdf$

$-cf$

$-df$

terminorum, locis paribus constitutorum, retentis signis reliquorum, habebimus $x^4+bx^3+bcxx+bcdx-bcdf\infty 0$.

$+c \quad +bd \quad -bcf$

$+d \quad +cd \quad -bdf$

$-f \quad -bf \quad -cdf$

$-cf$

$-df$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ esse summam quatuor radicum æqua-

æquationis; & tertium terminum eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis radicibus in ſe invicem ductis; at quartum terminum eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum eſſe productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in ſe invicem ductarum. Patet quoque, deficiente ſecundo termino, falſam radicem $-f$ æquari ſummæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, ſummam productorum ex binis, per $-$ deſignatorum, æquari reliquæ ſummæ productorum ex binis, cum ſigno $+$ affectorum. Non ſecus ſe res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, $x - d \infty 0$, & $x - f \infty 0$ hanc exurgere æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -bx^3 & +bcxx & -bcdx & +bcdf \infty 0. \\ & -c & +bd & -bcf & \\ & -d & +cd & -bdf & \\ & -f & +bf & -cdf & \\ & & +cf & & \\ & & +df & & \end{array}$$

Et mutatis ſignis locorum imparium, retentis reliquis, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +bx^3 & +bcxx & +bcdx & -bcdf. \\ & +c & +bd & +bcf & \\ & +d & +bf & +bdf & \\ & +f & +cd & +cdf & \\ & & +cf & & \\ & & +df & & \end{array}$$

Atque apparet, ſecundum terminum $+b+c+d+f$ eſſe ſummam quatuor radicum; tertium terminum $+bc+bd+cd+bf+cf+df$ eſſe ſummam productorum multiplicationis ex ſingulis binis; quartum $+bcd+bcf+bdf+cdf$ eſſe ſummam productorum multiplicationis ex ſingulis ternis; ac denique $+bcdf$ eſſe productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in ſe invicem ductarum.

CAPUT XII.

Regula pro inveniendis reliquis Æquationis radicibus, unâ falſarum datâ.

Oportet mutare ſigna terminorum locorum parium æquationis propoſitæ, ita ut falſæ radices evadant veræ, & veræ falſæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, ſuppoſitâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inſerviens, ſicuti ſupra docuimus. Atque in æquatione ſic inventa mutentur ſigna terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requiſito ſatisfacientem.

Exempli gratiâ. Eſto æquationis $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$ una ex falſis radicibus data, quæ ſit b, atque mutatis ſignis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$. Supponatur jam radix falſa b hujus æquationis eſſe vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inſerviens, conſulatur Capitis V. Prop^{tio} 2da; & elicientur inde hæ duæ æquationes

$$xx \begin{array}{l} +lx \\ +b \end{array} \begin{array}{l} +bb \\ +bl \\ -mm \end{array} \infty 0 \quad \& \quad xx \begin{array}{l} +bx \\ +l \end{array} + \frac{n^3}{b} \infty 0.$$

Quocirca mutatis utriuſque æquationis ſignis locorum parium, habebimus $xx \begin{array}{l} -lx \\ -b \end{array} \begin{array}{l} +bb \\ +bl \\ -mm \end{array} \infty 0$ & $xx \begin{array}{l} -bx \\ -l \end{array} + \frac{n^3}{b} \infty 0$, quarum quælibet quæſito ſatisfaciet.

CAPUT XIII.

Ad tollendum ſecundum terminum Æquationum QUADRATARUM.

$xx + lx - mm \infty 0$. Sit $z - \frac{1}{2}l \infty x$, & habebimus $zz * \begin{array}{l} -\frac{1}{4}ll \\ -mm \end{array} \infty 0$.

$$xx - lx - mm \infty 0. \text{ Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}l + z \infty x, \\ \frac{1}{2}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{l} zz * \begin{array}{l} -\frac{1}{4}ll \\ -mm \end{array} \infty 0 \\ yy * \begin{array}{l} -\frac{1}{4}ll \\ -mm \end{array} \infty 0. \end{array} \right.$$

$$xx - lx + mm \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}l + z \infty x,\\ \tfrac{1}{2}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l} zz * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{4}ll\\ +mm\end{array} \infty 0.\\ yy * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{4}ll\\ +mm\end{array} \infty 0.\end{array}\right.$$

CUBICARUM.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}l + z \infty x,\\ \tfrac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l} z^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ +m^2\end{array} z \begin{array}{l}-\tfrac{2}{27}l^3\\ -n^3\\ +\tfrac{1}{3}lm^2\end{array} \infty 0.\\ y^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ +m^2\end{array} y \begin{array}{l}+\tfrac{2}{27}l^3\\ -n^3\\ -\tfrac{1}{3}lm^2\end{array} \infty 0.\end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}l + z \infty x,\\ \tfrac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l} z^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ -m^2\end{array} z \begin{array}{l}-\tfrac{2}{27}l^3\\ -\tfrac{1}{3}lm^2\\ -n^3\end{array} \infty 0.\\ y^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ -m^2\end{array} y \begin{array}{l}+\tfrac{2}{27}l^3\\ +\tfrac{1}{3}lm^2\\ +n^3\end{array} \infty 0.\end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}l + z \infty x,\\ \tfrac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l} z^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ +mm\end{array} z \begin{array}{l}-\tfrac{2}{27}l^3\\ +\tfrac{1}{3}lm^2\\ +n^3\end{array} \infty 0.\\ y^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ +m^2\end{array} y \begin{array}{l}+\tfrac{2}{27}l^3\\ -\tfrac{1}{3}lm^2\\ -n^3\end{array} \infty 0.\end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}l + z \infty x,\\ \tfrac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l} z^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ -m^2\end{array} z \begin{array}{l}-\tfrac{2}{27}l^3\\ -\tfrac{1}{3}lm^2\\ +n^3\end{array} \infty 0.\\ y^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ -m^2\end{array} y \begin{array}{l}+\tfrac{2}{27}l^3\\ +\tfrac{1}{3}lm^2\\ -n^3\end{array} \infty 0.\end{array}\right.$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\ z - \tfrac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque}\ z^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ -m^2\end{array} z \begin{array}{l}+\tfrac{2}{27}l^3\\ +\tfrac{1}{3}lm^2\\ -n^3\end{array} \infty 0.$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\ z - \tfrac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque}\ z^3 * \begin{array}{l}-\tfrac{1}{3}ll\\ +m^2\end{array} z \begin{array}{l}+\tfrac{2}{27}l^3\\ -\tfrac{1}{3}lm^2\\ -n^3\end{array} \infty 0.$$

$x^3 +$

$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\ z - \tfrac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{llll} z^3 * & -\tfrac{1}{3}llz & +\tfrac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{3}lm^2 & \\ & & +n^3 & \end{array}$$

QUADRATO-QUADRATARUM.

$$\begin{array}{l} x^4 - lx^3 + mmxx - \\ n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Esto} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3 z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3 y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x^4 - lx^3 - mmxx + \\ n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Sit} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3 z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3 y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x^4 - lx^3 + mmxx + \\ n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Sit} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3 z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3 y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x^4 - lx^3 - mmxx - \\ n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Esto} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3 z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3 y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array} \right.$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$
\begin{array}{llll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \infty 0. \\
 & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \\
 & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\
 & & & +p^4
\end{array}
$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$
\begin{array}{llll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\
 & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm \infty 0. \\
 & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\
 & & & +p^4
\end{array}
$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$
\begin{array}{llll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\
 & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm \infty 0. \\
 & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\
 & & & +p^4
\end{array}
$$

$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\}$ eritque

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\
 & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\
 & & & -p^4 \\
y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 y & -\frac{3}{256}l^4 \\
 & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\
 & & & -p^4
\end{array}
\right.
$$

$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\}$ eritque

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\
 & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\
 & & & -p^4 \\
y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 y & -\frac{3}{256}l^4 \\
 & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\
 & & & -p^4
\end{array}
\right.
$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 y & -\frac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 y & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array} \right.$$

$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 & z -\frac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}$$

Unde colligere licet, omnes ſuppoſitiones, quæ ad tollendum ſecundum terminum adhibentur, neceſſariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione propoſita; & ſi nullæ in his fuerint, id indicio eſſe, nullas quoque eſſe imaginarias in æquatione propoſita. Nam, exempli gratiâ, ſi ſit æquatio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$: patet, ſi radix eſt realis, x neceſſariò debere æqualis eſſe $\frac{1}{4}l$, vel major, vel minor. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; ſi major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; ſi denique minor fuerit, transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd ſi ſecundus terminus æquationis propoſitæ afficitur ſigno $+$, ut, exempli gratiâ, ſi ſit $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$: patet, ſi adfuerit radix aliqua realis, ſuppoſitionem hanc $z - \frac{1}{4}l \infty x$ ſemper eſſe neceſſariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde conſtat, radices veras æquationum à radice y denominatarum eſſe falſas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum eſſe falſas æquationum à radice y denominatarum.

CAPUT XIV.

Continens modum tollendi penultimum terminum Æquationum, ſecundo termino carentium.

PRo *Cubicis*. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^2 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^3 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & tum rurſus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimenſionum ſupponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^4 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic in infinitum, tranſmutatis deinde æquationibus, uti dictum eſt.

Sed

Sed pro æquationibus quatuor dimenſionum commodius eſt, ſupponere quadratum ultimi termini diviſum per incognitam quantitatem R eſſe æquale radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. Eſto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, &, transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^9}{R^6} + \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6, fiet $n^9 + mmn^3 R^4 - n^3 R^6 \infty 0$, adeoq́ue diviſis per n^3, fiet $n^6 + mm R^4 - R^6 \infty 0$, hoc eſt, per tranſpoſitionem, habebitur $R^6 - mm R^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex ſuppoſitione habetur $x \infty \frac{n^3}{R^2}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$. Eſto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, fietq́ue $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$, hoc eſt, $R^6 + mm R^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cùm datur R^2, ex ſupra poſita ſuppoſitione habetur x.

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Eſto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, eritq́ue, transformatâ æquatione, $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} + n^3 \infty 0$, hoc eſt, $R^6 - mm R^4 * + n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex ſuppoſitione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$. Eſto $\frac{p^2}{R} \infty x$, &, transformatâ æquatione, fiet $\frac{p^8}{R^4} - \frac{mmp^4}{R^2} + \frac{n^3 pp}{R} - p^4 \infty 0$. Hoc eſt, multiplicatis omnibus per R^4, habebimus $p^8 - mmp^4 R^2 + n^3 pp R3 - p^4 R^4 \infty 0$, ac proinde diviſis per p^4, habebitur $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mm R^2 * - p^4 \infty 0$. æquatio quatuor dimenſionum, carens penultimo termino.

Exemplum ſecundum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$. Supponendo $\frac{pp}{R} \infty x$, transformetur æquatio, fietq́ue $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mm R^2 * + p^4 \infty 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exem-

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Suppositâ $x \infty \frac{pp}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty 0$, penultimo termino destituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum sextum. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit æquatio transformata $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty 0$, quæ destituitur penultimo termino.

Exemplum septimum. Proponatur $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifestum est, ex omnibus æquationibus auferri posse penultimum terminum, quandoquidem superiùs ostensum est, ex omni æquatione tolli posse secundum, ac modò jam est demonstratum, quo pacto ex æquationibus, secundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotasse operæ pretium duximus, cum Vieta, postquam Capite 1mo de *Æquationum Emendatione* secundum terminum cujusque æquationis tollere docuit, versùs finem ejusdem Capitis affirmet, posse etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac nostra quidem methodo constet, quomodo semper penultimus tolli queat.

CAPUT XV.

Methodus transmutandi Æquationes Cubicas compositas, in quibus secundus terminus deest, in Æquationes Cubicas simplices, quando id fieri potest.

PRoponatur hæc æquatio $x^3 * + 3mmx - n^3 \propto 0$. Supponamus $zz - zx - mm \propto 0$, hoc est, $x \propto \frac{zz - mm}{z}$. Unde, transformatâ æquatione, habebitur
$$\frac{z^6 - 3mmz^4 + 3m^4zz - m^6}{z^3} + \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 \propto 0,$$
hoc est, multiplicatis omnibus per z^3, invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3z^3 - m^6 \propto 0$, vel $z^6 \propto n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 \propto \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ est æquatio cubica simplex.

Cognitâ autem ejus radice z, erit ex supra positis radix altera $x \propto \frac{zz - mm}{z}$. Quæ semper est possibilis, cum z major sit quàm m.

Aliter. Supponatur $zz + zx - mm \propto 0$, eritque $x \propto \frac{mm - zz}{z}$. Unde transformatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3z^3 - m^6 \propto 0$, hoc est, $z^6 \propto -n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 \propto -\frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ rursus æquatio est cubica simplex. Cujus ope, cùm cognoscitur z, habebitur $x \propto \frac{mm - zz}{z}$, quæ semper erit possibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$, supponaturque $zz - zx + mm \propto 0$, hoc est, $x \propto \frac{zz + mm}{z}$. Unde transformatâ æquatione habebimus $\frac{z^6 + 3mmz^4 + 3m^4zz + m^6}{z^3}$
$- \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 \propto 0$, hoc est, $z^6 - n^3z^3 + m^6 \propto 0$, seu $z^6 \propto n^3z^3 - m^6$, cujus radix est $z^3 \propto \frac{1}{2}n^3 \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}n^6 - m^6}$.

Unde patet, oportere m^6 non majus esse quàm $\frac{1}{4}n^6$, ut æquatio hæc $z^6 \infty n^3 z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam si majus sit, non posset proposita æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$ sic in simplicem cubicam transmutari.

CAPUT XVI.

Methodus generalis, concernens usum secundarum radicum, ad tollenda signa radicalia ex Æquatione proposita.

SI fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipsas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimensiones.

Exempli gratiâ, habeamus hasce duas æquationes $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$. Quibus transpositis, habebimus $x^3 \infty - bxx + ccx + d^3$ & $x^3 \infty + lxx - mmx + n^3$, ac per consequens $\begin{array}{l} lxx - mmx + n^3 \infty 0 \\ b \quad\; - cc \quad - d^3 \end{array}$, hoc est, $xx \infty \frac{mmx + ccx + d^3 - n^3}{l + b}$. in quâ litera x pauciorum est dimensionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantùm æquatio inventa per x, & invenietur $x^3 \infty \frac{\begin{array}{l} mmxx + d^3x \\ cc \quad\;\; - n^3 \end{array}}{l+b}$.

Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum secunda, exhibet sequentem æquationem $\begin{array}{lll} + m^2 xx & - n^3 x & - ln^3 \infty 0. \\ + cc & + lm^2 & - bn^3 \\ - ll & + bm^2 & \\ - lb & + d^3 & \end{array}$

in quâ litera x similiter duarum tantùm est dimensionum. Sed si collata fuisset cum prima æquatione, inventa fuisset alia, ubi x adhuc pauciores habuisset dimensiones, ita ut eligenda sit ad comparationem facillima. Atque sic continuando inveniri hîc possunt duæ aliæ, ubi x est unius dimensionis, & tandem alia ubi prorsus deest. Quod ipsum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Unde apparet, posse quidem aliquando auferri hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimensionum.

Exem-

Exempli gratiâ, si dentur hæ æquationes $xx - bx - cc \infty 0$ & $xx - bx + dd - bb \infty 0$, habebimus $xx - bx \infty cc$, & $xx - bx \infty + bb - dd$, ergo $cc \infty bb - dd$.

Venio jam ad asymmetrias seu irrationales quantitates, pro quibus tollendis, oportet tantùm supponere literas æquales singulis terminis asymmetris æquationis propositæ. Quâ quidem ratione non tantùm obtinebimus æquationem propositam, in qua omnes hæ literæ sunt substitutæ; sed etiam tot alias, quot literæ fuerunt suppositæ. Unde collatis ordine omnibus hisce æquationibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur ac per consequens nullum signum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.\,bbx} - \sqrt{dx} \infty 0$. Ad tollendas igitur ejus asymmetrias, ponamus $R \infty \sqrt{C.\,bbx}$, & $z \infty \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione proposita substitutis, habebimus $c + R - z \infty 0$; atque ex reliquis suppositionibus erit $R^3 \infty bbx$, & $zz \infty dx$. Primò, ad tollendum R, habebimus $R \infty z - c$, ideoque $R^3 \infty z^3 - 3czz + 3ccz - c^3$. Atqui est quoque $R^3 \infty bbx$. Quare erit $z^3 - 3czz + 3ccz - c^3 - bbx \infty 0$, & per consequens $z^3 \infty + 3czz - 3ccz + c^3 + bbx$. Sed si multiplicetur superiùs proposita æquatio $zz \infty dx$ per z, habebitur etiam $z^3 \infty dxz$. Ergo erit $3czz \begin{matrix} -3cc \\ -dx \end{matrix} z \begin{matrix} +c^3 \\ +bbx \end{matrix} \infty 0$, & substituto dx loco zz, habebimus $3cdx \begin{matrix} -3cc \\ -dx \end{matrix} z \begin{matrix} +c^3 \\ +bbx \end{matrix} \infty 0$, hoc est, $\begin{matrix} 3cc \\ dx \end{matrix} z \infty 3cdx \begin{matrix} +bbx, \\ c^3 \end{matrix}$ seu $z \infty \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ si multiplicetur per z, fiet $zz \infty \frac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc + dx}$. Sed est quoque $zz \infty dx$. Igitur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z \infty 3ccdx + ddxx$, hoc est, $\frac{3ccdx + ddxx}{3cdx + bbx + c^3} \infty z$. Inventa autem est $z \infty \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

$$\begin{array}{llll} d^3x^3 & -3ccddxx & +3c^4dx & -c^6 \infty 0. \\ & -6bbcd & -2c^3bb & \\ & -b^4 & & \end{array}$$

In qua æquatione nullus terminus irrationalis reperitur. Quòd ſi autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantùm operando ut ſupra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales ſuppoſitas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Neceſſitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, ſi fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, ſigna radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non poſſint.

FINIS.



Ad Tractatum de Limitibus Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clarissimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,

Mathematatum in Illustri Leidensi Academia Professori,

ERASMIUS BARTHOLINUS

S. P.

NIsi meminissem, quanto majore animo honestatis fructus in conscientia, quàm in fama reponatur; nequaquam opportunum fuisset, in edendis hisce opusculis Analyticis consilium. Verùm quia communibus magis commodis quàm privatæ jactantiæ studui, eò animus ausus est, deliberato consilio obsequi. Cujus meæ conscientiæ interpretem, non alium magis desidero, quàm te, Vir Clarissime, quem utilitatibus aliorum, plus quàm propriæ laudi, indies deservire, compertum habeo. Venit in mentem studiosum illud otium, quod Leidæ mihi semper emolumento, utrisque deinde solatio erat, cujusq; varietates si oratione repetere vellem, prout animo pleræque obversantur, non dubito quin existimationi hominum diligentia & fides nostra, & in plerisque etiam pietas subjiceretur. Et licèt nesciam, an ullum tempus jucundiùs exegerim; tamen

 eâ de

câ de causâ magnifacio, quòd amicitiæ tuæ, usque ad intimam familiaritatem, capacem me redderet. Neque aliam interpretationem habuit, quòd Leidâ discessurus, Isagogen Cartesianam typis excudendam concinnaveram, ut meam famam cum tua extenderem. Quâ de causâ, cum non modò offensas, verùm etiam simultates varias subierim; non ignoro, quæ futura sit de hisce jam edendis sententia. Ne dubites tamen quin omnia æquo animo toleraverim, præsertim quia pietas & obsequium causam junxêre. Quem enim præterit, fatum literatorum? Mihi certè non improvisa est calumniandi vanitas. Est ita naturâ comprobatum, ut benefactis major ex conscientiâ merces, quàm in ore hominum reponatur: nam plerique, tantum suæ detractum iri gloriæ existimant, quantum cesserit alienæ: postremò, ignavissimus quisque aliorum scripta carpere non veretur. Sic contendere pro moribus temporum eruditio est. Quod recordantem, posteritatis magna miseratio subit. Quot enim præclara inventa putas obscurari, propter scelus hoc obtrectandi? Plerique se intra perpetuum silentium tenere amant, potiùs quàm malignitati interpretantium exponi. Ita communem hunc errorem, bonum publicum magnis detrimentis expiabit. Ego aliorum exemplo, quidem didici nullam ex meis laboribus sperare laudem; tanta tamen mihi semper fuit reverentia posterûm, ut censuram erroris non tam reformidem

dem

dem quàm inhumanitatis. Sed, ut de pictore nisi Artifex judicare, ita nisi Mathematicus non satis potest perspicere Mathematica; tuæ potissimùm sententiæ hæc exponuntur. Eximium habent usum ea quæ sequenti tractatu exponentur, ad numerosam Æquationum resolutionem, ut reliquas utilitates pertranseam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut judiciis parcant, donec penitus omnia inspexerint. Et si qui fuerint qui hæc recusaverint, sciant se nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conscientiam. Te verò, Vir Clarissime, si offenderint, omnibus commendationibus destituta reputabo. Vale.

POSTE-

POSTERIOR TRACTATUS
DE
LIMITIBUS ÆQUATIONUM,
Seu

Quo pacto ex forma Æquationum affectarum definiri possint limites, intra quos radices veræ debent offendi.

DE

DE LIMITIBUS ÆQUATIONUM.

Caput I.

De Æquationum Quadratarum seu duarum dimensionum limitibus.

Prop. 1. $xx - lx + mm \infty 0$.



Er transpositionem erit $mm \infty lx - xx$, & si prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx; & diviso utroque termino per x, erit l major quàm x. Quin & per transpositionem propositæ æquationis habebitur $xx \infty lx - mm$: ideoque altera pars est realis, & lx majus quàm mm. Unde diviso utroque termino per l, erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propositæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, sed minor quàm l.

Prop. 2. $xx - lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx \infty lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm, & x major quàm m, ac proinde mx majus quàm mm. Unde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque si utraque pars dividatur per x, erit x minor quàm $l + m$. Rursus, quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx; ac proinde si uterque terminus dividatur per x, erit x major quàm l, & lx majus quàm ll. Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Postremò, quandoquidem x major est quàm m, erit lx majus quàm lm, & xx majus quàm $lm + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Unde radix æquationis propositæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, sed minor quàm $l + m$.

Prop. 3. $xx + lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx + lx \infty mm$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ majus erit quàm x. Rursus existente $xx + lx \infty mm$, erit mm majus quàm xx, & m major quàm x, ac proinde mx majus quàm xx. Atqui habemus $xx + lx \infty mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm. Hinc divisâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa est x radix æquationis propositæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

CAPUT II.

De limitibus Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, secundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$.

PEr transpositionem habebimus $x^3 \infty + mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3. Unde diviso utroque termino per mm, erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per transpositionem erit $mmx - x^3 \infty n^3$, ac per consequens mm majus quàm xx, & m major quàm x. Quare inventa est utraque radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$, & minor quàm m.

Prop. 2. $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3$, eritque xx majus quàm mm, & x major quàm m. Erit quoque $x^3 - n^3 \infty mmx$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, ac proinde nnx majus quàm n^3. Atqui per transpositionem propositionis habemus $mmx + n^3 \infty x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3; & divisâ utrâque parte per x, erit $mm + nn$ majus quàm xx; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo est x radix æquationis propositæ major quàm m & n, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipsius n^3, quòd loco nn in vinculo assumi possit quantitas aliqua, quæ non

sit

fit minor. Id quod non erit difficile, cognitis nempe tribus dimensionibus ipsius n^3, sumendoque loco nn rectangulum sub duabus quantitatibus; quarum alterutra non sit ipsâ n minor. Eritque hoc ad sequentia notatu dignum.

Prop. 3. $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 \infty n^3 - mmx$, eritque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Rursus erit $mmx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n^3 major quàm x^3, & n major quàm x, ac proinde nnx majus quàm x^3. Sed per transpositionem æquationis propositæ est quoque $x^3 + mmx \infty n^3$. Ergo $mmx + nnx$ majus erit quàm n^3, & divisâ utrâque parte per $nn + mm$, erit x major quàm $\frac{n^3}{nn + mm}$. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ esse major quàm $\frac{n^3}{mm + nn}$, sed minor quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n. Possumus etiam loco nn accipere rectangulum duarum maximarum dimensionum ipsius n^3, ut radicis cubicæ extractio evitetur.

Caput III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + n^3 \infty lxx$, ideoque xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Rursus erit $n^3 \infty lxx - x^3$, & consequenter l major quàm x. Quælibet igitur radicum x æquationis propositæ major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & minor quàm l.

Prop. 2. $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus erit $x^3 - n^3 \infty lxx$, & consequenter x major quàm n, & xx majus quàm nn, & nxx majus quàm n^3. Atqui habemus quoque per transpositionem $lxx + n^3 \infty x^3$. Quare erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Dividatur utraque pars per xx, eritque $l + n$

major quàm x. Inventa itaque eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm l & n, ſed minor quàm $l+n$. Manifeſtum eſt quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3, quòd loco n ſumi poſſit minor trium dimenſionum ipſius n^3, quando x major eſt; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimenſionum ipſius n^3 accipi queat, & ſic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

Prop. 3. $x^3+lxx * -n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 \infty n^3 - lxx$, ac per conſequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Eſt etiam $lxx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n major quàm x, & nxx majus quàm x^3. Sed habetur $x^3+lxx \infty n^3$. Ergo $nxx+lxx$ majus erit quàm n^3, hoc eſt, diviſâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa eſt itaque radix x æquationis propoſitæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, ſed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n. Demonſtratur præterea $nnx+lnx$ majus eſſe quàm n^3, & $nx+lx$ majus quàm nn, & conſequenter x major quàm $\frac{nn}{l+n}$, quandoquidem n major eſt quàm x.

CAPUT IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

Prop. 1. $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem habebimus $x^3 - lxx \infty n^3 - mmx$. Hinc ſi x æquetur ipſi l, erit etiam x ipſi $\frac{n^3}{mm}$ æqualis. Ideoque, ſi viciſſim l æquetur ipſi $\frac{n^3}{mm}$, hoc eſt, $lmm \infty n^3$, erit ſimiliter x radix æquationis propoſitæ æqualis ipſi l & $\frac{n^3}{mm}$. Præterea ſi $x^3 - lxx$ eſt realis, hoc eſt, x major quàm l, erit quoque $n^3 - mmx$ realis; & conſequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Quòd ſi autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor ſit, tranſponatur propoſita æquatio hâc ratione $lxx - x^3 \infty mmx - n^3$. Et quandoquidem ſupponitur

tur

tur $lxx - x^3$ esse realis, hoc est, l major quàm x, erit $mmx - n^3$ etiam realis, & consequenter major erit x quàm $\frac{n^3}{mm}$. Inventa est itaque radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & ipsi $\frac{n^3}{mm}$, cùm duo hi termini æquantur. Et si unam tantùm habeat aut tres, quælibet earum erit intra hos limites, quando inæquales sunt; si verò æquales, hoc est, $lmm \propto n^3$, substituto lmm loco n^3 in æquatione proposita, & dividendo per $x - l$, cognoscemus eam non habere aliam radicem in hoc casu quam l.

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3 - lxx$. Quòd si ergo xx & mm sunt æqualia, erit etiam xx ipsi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & si xx majus est quam mm, erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quam xx; & si xx minus est quam mm, minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quam xx. Inventi itaque sunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propositæ, si fuerint æquales, hoc est, si lmm æquatur ipsi n^3; aut necessariò inter duos erit, si inæquales fuerint. Eadem est ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{mm}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \propto mmx + n^3$, ideoque x major quam l. Rursus cum per transpositionem sit $x^3 - mmx \propto lxx + n^3$, erit xx majus quam mm, & x major quam m, & mxx majus quam mmx. Sed per transpositionem est quoque $x^3 - n^3 \propto lxx + mmx$, & per consequens x major quam n, & nxx majus quam n^3. Quin & per transpositionem propositæ habetur $lxx + mmx + n^3 \propto x^3$, atque inventum est mxx majus quam mmx, & nxx majus quam n^3. Ergo erit $lxx + mxx + nxx$ majus quam x^3. Quocirca si utraque pars dividatur per xx, erit $l + m + n$ major quam x. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quam l, m, & n, sed minor quam $l + m + n$.

Prop. 4. $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + mmx \infty n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Sed eſt quoque $x^3 + lxx \infty n^3 - mmx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. At verò eſt etiam $lxx + mmx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n major quàm x; quare & nnx majus erit quàm x^3, & lnx majus quàm lxx. Atqui eſt $x^3 + lxx + mmx \infty n^3$. Ergo $nnx + lnx + mmx$ majus erit quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{nn + ln + mm}$. Quare inventa eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm $\frac{n^3}{nn + ln + mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n.

Prop. 5. $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $mmx + n^3 \infty lxx - x^3$, ideoque l major quàm x. Rurſus erit $x^3 + n^3 \infty lxx - mmx$, & per conſequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ neceſſariò majorem eſſe quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l. Sed per tranſpoſitionem eſt quoque $x^3 + mmx \infty lxx - n^3$, & conſequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + lxx \infty mmx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \infty mmx - lxx$, & per conſequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x. Rurſus erit $lxx + n^3 \infty mmx - x^3$, & conſequenter m major quàm x. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ neceſſariò majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$, ſed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop.

Prop. 7. $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty mmx - n^3$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l, quòd tunc quoque x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ est æqualis. Ideoque si l æquatur ipsi $\frac{n^3}{mm}$, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum l & $\frac{n^3}{mm}$; & si inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propositæ poterit esse inter hos terminos. Quia videmus, cùm x major est quàm l, tum quoque x majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$; & si minor est quàm l, tum similiter x minorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$. Sed per transpositionem est etiam $x^3 - mmx \infty lxx - n^3$. Hinc si xx æquetur ipsi mm, erit quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$. Ideoque si fuerint hi termini mm & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per transpositionem est quoque $x^3 + n^3 \infty lxx + mmx$, ideoque $lxx + mmx$ majus quàm x^3, & $lx + mm$ majus quàm xx. At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, si æquatio proposita fuerit realis. Et si æqualis fuerit vel major quàm m, erit & $lx + mx$ majus quàm xx, ac per consequens $l + m$ major quàm x. Quòd si autem minor fuerit quàm m, multo magis $l + m$ major erit quàm x. Porrò ex hac eadem æquatione constat, quòd $lxx + mmx$ etiam majus est quàm n^3. Hinc cum $l + m$ major sit quàm x, ideoque $llx + lmx$ majus quàm lxx; erit quoque $llx + lmx + mmx$ majus quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicum æquationis propositæ major est quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{ll + 2lm + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major est quàm x, si major fuerit x quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si verò m major est quàm x, invenimus, quòd $lxx + mmx$ est majus

jus

jus quàm n^3, hinc $lmx+mmx$ multo magis erit majus quàm n^3; adeoque x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$, & consequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

CAPUT V.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 \infty n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed per transpositionem est quoque $p^4 \infty n^3 x - x^4$, & consequenter n^3 major quàm x^3, ac n major quàm x. Ergo utraque radix x æquationis propositæ major erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minor quàm n.

Prop. 2. $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & $nnxx$ majus quàm $n^3 x$. Sed est quoque $x^4 - p^4 \infty n^3 x$, ideoque x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & $ppxx$ majus quàm p^4. At per transpositionem est etiam $n^3 x + p^4 \infty x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4. Hinc divisâ utrâque parte per xx, erit xx minus quàm $nn+pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn+pp}$. Invenimus igitur, quòd radix æquationis propositæ est major quàm n & p, sed minor quàm $\sqrt{nn+pp}$, ac proinde multo minor quàm $n+p$.

Prop. 3. $x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^4 \infty p^4 - n^3 x$, ac per consequens $\frac{p^4}{n^3}$ major quàm x. Similiter erit $n^3 x \infty p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4, & p major quàm x, & $p^3 x$ majus quàm x^4. Sed est præterea $x^4 + n^3 x \infty p^4$, ideoque $p^3 x + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3+n^3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propositæ est major quàm $\frac{p^4}{p^3+n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$ & p.

CA-

CAPUT VI.

De Æquationibus quatuor dimensionum, in quibus tertius & quartus terminus deficiunt.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 \infty + lx^3 - p^4$, ideoque x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò est etiam $p^4 \infty lx^3 - x^4$, & consequenter l major quàm x. Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum radicum æquationis propositæ est major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l. Hinc quoniam l major est quàm x, & lx^3 majus quàm p^4, habebitur $llxx$ majus quàm p^4, & consequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{ll}$, & x major quàm $\frac{pp}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4$, ideoque x major quàm l. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, ac proinde px^3 majus quàm p^4. Sed est etiam $lx^3 + p^4 \infty x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + p$ major quàm x. Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm l & p, at minor quàm $l + p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 \infty p^4 - lx^3$, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 \infty p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x, & px^3 majus quàm x^4. Atqui est etiam $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm p^4, & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare invenimus, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l+p}}$, sed minor quàm p & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Facillimè verò evitantur extractiones radicum cubicarum, sumendo terminos paulò majores aut minores, prout necessitas requirit. Atque in hoc ca-

ſu, quoniam x^3 major eſt quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x, erit pxx majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lp+pp}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lp+pp}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus eſt quàm x^3, erit $\frac{p^4x}{l}$ majus quàm x^4, & $lppx$ majus quàm lx^3, quia p major eſt quàm x. Atqui eſt $x^4+lx^3 \infty p^4$. Ergo $\frac{p^4x}{l}+lppx$ majus erit quàm p^4. Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l, & diviſâ per pp, habebitur $ppx+llx$ majus quàm lpp, & x major quàm $\frac{lpp}{ll+pp}$.

De æquationibus quatuor dimenſionum, in quibus ſecundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: ſiquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipſarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri poſſint.

CAPUT VII.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, ſecundo termino carentibus.

Prop. I. $x^4 * -mmxx+n^3x-p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem erit $x^4-mmxx \infty p^4-n^3x$. Unde apparet, quòd, ſi fuerit xx æquale ipſi mm, hoc eſt, $x \infty m$, etiam x ipſi $\frac{p^4}{n^3}$ ſit æqualis futura. Ideoque ſi fuerit m æqualis ipſi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc eſt, $mn^3 \infty p^4$, radix x æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & ſi inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive unam ſive tres habuerit, ſemper erit inter duos hoſce terminos. Præterea cognoſcitur, ſi duo hi termini fuerint æquales, hoc eſt, $mn^3 \infty p^4$, ſubſtituto mn^3 loco p^4 in æquatione propoſita, eâque diviſâ per $x-m$, fore, ut non poſſit habere aliam radicem realem præter m.

Prop.

Prop. 2. $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem habebimus $x^4 - n^3x \infty p^4 - mmxx$. Unde conſtat, ſi x æqualis fuerit ipſi n, fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$; hoc eſt, $x \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$; & ſi fuerit $n \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & ſi inæquales fuerint, tunc eam neceſſariò futuram inter hoſce duos. Idem demonſtrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n^3}{mm}$; nempe ſi fuerint æquales, radix æquationis propoſitæ æquabitur unicuique illorum duorum; ſin inæquales, neceſſariò conſtituetur inter duos, tranſpoſitâ ſcilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \infty n^3x - mmxx$.

Prop. 3. $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem erit $x^4 - mmxx \infty n^3x + p^4$, ideoque xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Sed eſt etiam $x^4 - n^3x \infty mmxx + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & nx^3 majus quàm n^3x. Eodem modo eſt $x^4 - p^4 \infty mmxx + n^3x$, & conſequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Atqui per tranſpoſitionem eſt quoque $mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$. Quare $mx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $m + n + p$ major quàm x. Conſimili ratione demonſtrabitur, quòd $mmxx + nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4, & conſequenter $mm + nn + pp$ majus quàm xx. Invenimus ergo, quòd radix x propoſitæ æquationis major eſt quàm m, n, & p, at minor quàm $m + n + p$, & $\sqrt{mm + nn + pp}$.

Prop. 4. $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + mmxx \infty p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Similiter eſt $x^4 + n^3x \infty p^4 - mmxx$, ac per con-

ſequens $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, hoc eſt, $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Atqui eſt quoque $mmxx + n^3x \infty p^4 - x^4$, & conſequenter p^4 majus quàm x^4, ac p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, nec non $mmpx$ majus quàm $mmxx$. Sed eſt etiam $x^4 + mmxx + n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x + mmpx + n^3x$ majus eſt quàm p^4, ac per conſequens, diviſâ utrâque parte per $p^3 + mmp + n^3$, erit radix x propoſitæ æquationis major quàm $\frac{p^4}{p^3 + mmp + n^3}$; at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\frac{pp}{m}$, & p.

Prop. 5. $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $n^3x + p^4 \infty mmxx - x^4$, ideoque mm majus quàm xx, & m major quàm x. Similiter eſt $x^4 + p^4 \infty mmxx - n^3x$, & conſequenter x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Præterea eſt $x^4 + n^3x \infty mmxx - p^4$, ac per conſequens xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm m.

Prop. 6. $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + mmxx \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed eſt etiam $x^4 + p^4 \infty n^3x - mmxx$, ac per conſequens $\frac{n^3}{mm}$ majus quàm x. Similiter eſt $x^4 + mmxx + p^4 \infty n^3x$, ideoque n^3 major quàm x^3, & n major quàm x. Invenimus ergo quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n.

Prop. 7. $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - mmxx \infty n^3x - p^4$. Unde patet,

tet, ſi xx æquatur ipſi mm, hoc eſt, $x \infty m$, eandem x fore æqualem ipſi $\frac{p^4}{n^3}$; ac per conſequens, ſi fuerint termini hi m & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, erit una radicum æquationis propoſitæ æqualis ſingulis ipſorum; & ſi inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propoſitæ poterit eſſe inter illos duos m & $\frac{p^4}{n^3}$. Eodem modo per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3 x \infty mmxx - p^4$. Unde ſimiliter diſcimus, ſi x^3 æquatur ipſi n^3, hoc eſt, $x \infty n$, fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, $x \infty \frac{pp}{m}$. Ideoque ſi hi termini n & $\frac{pp}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis eorundem terminorum; ſin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propoſitæ inter illos duos conſtituta erit. Præterea per tranſpoſitionem eſt $x^4 + p^4 \infty mmxx + n^3 x$, ideoque $mmxx + n^3 x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Porrò, ſi propoſita æquatio eſt realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n. Si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $mm + nn$ majus quàm xx, hoc eſt, x minor erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Si fuerit x minor quàm n, minor etiam erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propoſitæ neceſſariò minorem eſſe quàm $\sqrt{mm + nn}$. Denique exiſtente $x^4 + p^4 \infty mmxx + n^3 x$, erit ſimiliter $mmxx + n^3 x$ majus quàm p^4. Et quia inventa eſt $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x, erit conſequenter $mmx\sqrt{mm + nn}$ majus quàm $mmxx$, ideoque $mmx\sqrt{mm + nn}, + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{mm\sqrt{mm + nn}, + n^3}$. Quare inventus eſt terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ. Atque ita modo ſequenti capite obſervato propoſitione ſeptimâ demonſtrari poteſt, quòd x major eſt quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$.

CAPUT VIII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx$. Unde constat, si x est æqualis ipsi l, etiam xx æquari $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$; ideoque si l æqualis est ipsi $\frac{pp}{m}$, hoc est, $lm \infty pp$, erit radix æquationis propositæ æqualis singulis terminorum l & $\frac{pp}{m}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos; sed si fuerint æquales, hoc est, $lm \infty pp$, & $llmm \infty p^4$, substituto $llmm$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - l$, cognoscemus in hoc casu non haberi aliam radicem veram præter l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty p^4 - lx^3$. Unde constat, si fuerit $x \infty m$, etiam $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ æquari ipsi x; ideoque si duo termini m & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ sint æquales, erit radix æquationis æqualis singulis horum terminorum; sin verò inæquales fuerint, erit illa necessariò inter duos. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty mmxx - lx^3$. Unde discimus, quòd si x æqualis est ipsi p, fore quoque eam æqualem ipsi $\frac{mm}{l}$: ideoque si termini p & $\frac{mm}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; sed si inæquales fuerint, erit illa necessariò inter utrosque constituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty mmxx + p^4$, ideoque x major

major quàm l. Sed & per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 + p^4$, ideoque x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + mmxx$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Præterea per transpositionem propositionis est $lx^3 + mmxx + p^4 \infty x^4$, ideoque $lx^3 + mx^3 + px^3$ majus quàm x^4, & $l + m + p$ majus quàm x. Quare invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, m, & p, at minorem quàm $l + m + p$. Denique per transpositionem est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$. Atqui demonstratum est superiùs x majorem esse quàm l, ac proinde ll minus quam lx. Multò igitur magis xx majus erit quàm $ll + mm$, & x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$, $\sqrt{\sqrt{m^4 + p^4}}$, & $\sqrt{\sqrt{mmpp + p^4}}$.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - mmxx$, ideoque $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, & $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + mmxx \infty p^4 - lx^3$, ac per consequens p major quàm x, & $ppxx$ majus quàm x^4, & $llpp$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est etiam $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$. Quare $ppxx + lpxx + mmxx$ majus erit quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{pp + lp + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$. At verò existente $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$, erit quoque p^4 majus quàm lx^3, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ majus quàm x. Inventa igitur est radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$; at minor quàm $\frac{pp}{m}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major

jor quàm x. Deinde eſt $x^4 + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac per conſequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea eſt $x^4 + mmxx \infty lx^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Invenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{mm}{l}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + p^4 \infty mmxx - lx^3$, ideoque $\frac{mm}{l}$ majus quàm x. Deinde eſt $lx^3 + p^4 \infty mmxx - x^4$, ac proinde m major quàm x. Præterea eſt $x^4 + lx^3 \infty mmxx - p^4$, & conſequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty mmxx - p^4$. Unde patet, ſi x æqualis eſt ipſi l, ipſam x quoque fore æqualem ipſi $\frac{pp}{m}$; & per conſequens, ſi fuerint termini l & $\frac{pp}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propoſitæ æqualis ſingulis illorum; & ſi fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propoſitæ poterit eſſe inter illos duos conſtituta. Eodem modo per tranſpoſitionem eſt $x^4 - mmxx \infty lx^3 - p^4$. Unde ſimiliter conſtat, ſi fuerit x æqualis ipſi m, fore quoque x æqualem ipſi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; ideoque ſi æquales fuerint m & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, una radicum æquationis propoſitæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & ſi fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propoſitæ erit inter illos duos conſtituta. Porrò per tranſpoſitionem eſt quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + mmxx$, unde $lx^3 + mmxx$ majus erit quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Jam ſi fuerit æquatio propoſita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, & $l+m$ major quàm x. Quòd si fuerit x minor quàm m, multo magis ipsa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4+p^4 \infty lx^3+mmxx$ etiam constat, quòd lx^3+mmxx majus est quàm p^4. Atqui inventa est $l+m$ major quàm x. Ergo $llxx+lmxx$ majus erit quàm lx^3, & $llxx+lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, ideóque xx majus quàm $\frac{p^4}{ll+lm+mm}$. Hinc cum $llxx+2lmxx+mmxx$ multò majus sit quàm p^4, erit quoque per consequens $lx+mx$ majus quàm pp, & x major quàm $\frac{pp}{l+m}$. Quare invenimus quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\sqrt{\frac{p^4}{ll+lm+mm}}$ & $\frac{pp}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterùm quoniam invenimus, quòd x necessariò est minor quàm $l+m$; patet, si x supponitur major quàm m, eam fore inter hos terminos $l+m$ & m. Quòd si m fuerit æqualis aut major quàm x; quoniam lx^3+mmxx majus est quàm p^4, erit & $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

CAPUT IX.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum tertio termino carentium.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - n^3x$. Unde patet, quòd si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ideóque si fuerit l æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, radix æqua-

tionis propoſitæ æqualis erit ſingulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & ſi fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive unam, ſive tres habuerit, ſemper erit inter hos terminos. Præterea cognoſcimus, quòd, ſi fuerint hi ultimi termini æquales, hoc eſt, $ln^3 \infty p^4$, ſubſtituto in æquatione propoſita ln^3 loco p^4, & diviſâ æquatione per $x - l$, ipſa non poſſit aliam habere veram radicem quàm l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3 x \infty p^4 - lx^3$. Unde conſtat, ſi x æqualis eſt ipſi n, fore quoque $x^3 \infty \frac{p^4}{l}$, hoc eſt, $x \infty \sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$; & ſi fuerit n æqualis ipſi $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$, radix æquationis æquabitur ſingulis horum terminorum; & ſi fuerint inæquales, erit neceſſariò inter duos. Deinde per tranſpoſitionem eſt $x^4 - p^4 \infty n^3 x - lx^3$. Unde patet, ſi fuerit x æqualis ipſi p, fore quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$, hoc eſt, $x \infty \sqrt{\frac{n^3}{l}}$; ideóque ſi fuerit p æqualis ipſi $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis horum terminorum, & ſi fuerint inæquales, erit neceſſariò inter utroſque.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty n^3 x + p^4$, ideóque x major quàm l. Eodem modo eſt $x^4 - n^3 x \infty lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n, & nx^3 majus quàm $n^3 x$. Similiter eſt $x^4 - p^4 \infty lx^3 + n^3 x$, ideóque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Sed per tranſpoſitionem eſt quoque $lx^3 + n^3 x + p^4 \infty x^4$. Quare $lx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + n + p$ major quàm x. Ergo invenimus radicem x æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm l, n, & p, at minorem quàm $l + n + p$. Porrò ex hac æquatione $lx^3 + n^3 x + p^4 \infty x^4$ etiam conſtat, quod $lx^3 + n^3 x$ eſt minus quàm x^4: & quandoquidem invenimus l minorem eſſe quàm x, erit $l^3 x$ minus quàm lx^3, ideóque $l^3 x + n^3 x$ multò minus quàm x^4, & x^3 major quàm $l^3 + n^3$. Non diſſimili ratione demonſtrabitur, quòd x major eſt quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$ & $\sqrt{\sqrt{ln^3 + p^4}}$.

Prop.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - n^3 x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Eodem modo est $x^4 + n^3 x \infty p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 + n^3 x \infty p^4 - x^4$, & per consequens p major quàm x, & $p^3 x$ majus quàm x^4, ac $lppx$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est quoque $x^4 + lx^3 + n^3 x \infty p^4$. Quare $p^3 x + lppx + n^3 x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$. Et sic inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $n^3 x + p_4 \infty lx^3 - x_4$, ideoque l major quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - n^3 x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc est, x major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Sed est quoque $x^4 + n^3 x \infty lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò major est quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$, at minor quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty n^3 x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx, hoc est, x minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Deinde est $x^4 + lx^3 \infty n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea est $lx^3 + p^4 \infty n^3 x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3, hoc est, x minor quàm n. Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum x æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty n^3x - p^4$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; & per consequens, si fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, una ex radicibus æquationis propositæ æqualis erit singulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter ipsos. Deinde per transpositionem est $x^4 - n^3x \infty lx^3 - p^4$. Unde simili modo patet, si x æquatur ipsi n, ipsam x quoque æquari ipsi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; ideoque si termini hi n & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ æquales fuerint, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter utrosque. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Sin verò minor sit, erit x multò minor quàm $l + n$. Quare utraque duarum radicum propositæ æquationis necessariò minor erit quàm $l + n$. Quin & existente $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, erit quoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4. Atqui invenimus $l + n$ majorem esse quàm x, ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx, nec non $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Ergo $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$. Et quandoquidem cubus ex $l + n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ major est quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$, ut & major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$, at minor quàm $l + n$. Præterea, quoniam $l + n$ major est quàm x, si fuerit x major

major quàm n, erit necessariò inter hos terminos $l+n$ & n. Quòd si verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x, quia $lx^3 + n^3 x$ majus est quàm p^4, erit & $lnnx + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ac proinde quælibet radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

CAPUT X.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $lx^3 + n^3 x \infty x^4 + mmxx + p^4$, ideoque $lx^3 + n^3 x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3, hoc est, $l+n$ major quàm x, & x minor quàm n. Multò igitur magis minor erit quàm $l+n$. Ergo x necessariò minor erit quàm $l+n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3 + n^3 x \infty x^4 + mmxx + p^4$ constat, esse $lx^3 + n^3 x$ majus quàm p^4. Sed inventa est $l+n$ major quàm x, ac per consequens $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3 x + lnnx + 2lln x$ majus quàm lx^3. Quare erit $l^3 x + lnnx + 2llnx + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l+n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$. Inventus est itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicum æquationis propositæ, sive hæc duas sive quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l+n$ semper major est quàm x, si ponatur x quoque major quàm n; manifestum est eam esse inter duos terminos $l+n$ & n. Quòd si autem x fuerit æqualis vel minor quàm n, quoniam est $lx^3 + n^3 x$ majus quàm p^4; erit $lnnx + n^3 x$

majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ergo unaquæque radicum propositæ æquationis, sive duas, sive tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Similiter est $x^4 + n^3x + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac idcirco x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx + p^4 \infty lx^3 - n^3x$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique est $x^4 + mmxx + n^3x \infty lx^3 - p^4$, & consequenter x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx + n^3x \infty x^4 + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx + n^3x$ majus quàm x^4. Jam si proposita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + mx^3 + nx^3$ majus quàm x^4, & $l + m + n$ major erit quàm x, & magis si fuerit x minor quàm maxima duarum m & n. Quare $l + m + n$ erit necessario major quàm x. Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m, erit radix æquationis propositæ inter hosce terminos $l + m + n$ & m. Quòd si, existente m æquali aut majore quàm n, etiam m sit æqualis vel major quàm x; erit & $lmmx + m^3x$

$+ n^3x$

$+n^3x$ æquale aut majus quàm $lx^3+mmxx+n^3x$, ac per consequens majus quàm p^4; ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lmm+m^3+n^3}$. Unde si fuerit m vel æqualis vel major quàm n, erit x necessariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm+m^3+n^3}$; & si n fuerit major quàm m, consimili ratione demonstrabitur x etiam necessariò majorem esse minore horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+mmn+n^3}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse minore horum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm+m^3+n^3}$, si m vel æqualis vel major fuerit quàm n; aut majorem minore duorum n & $\frac{p^4}{lnn+mmn+n^3}$, si n major sit quàm m; at verò semper minorem quàm $l+m+n$.

Prop. 4. $x^4-lx^3-mmxx+n^3x+p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $lx^3+mmxx \infty x^4+n^3x+p^4$, ideoque lx^3+mmxx majus quàm x^4, & $lx+mm$ majus quàm xx. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx+mx$ majus quàm xx, & $l+m$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm m. Ergo x necessariò minor erit quàm $l+m$. Unde si fuerit x major quàm m, erit inter hosce terminos $l+m$ & m. Quòd si x fuerit vel æqualis vel minor quàm m, quandoquidem & lx^3+mmxx majus est quàm p^4; erit $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4; ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

Prop.

Prop. 5. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$

Demonstrabitur ex transpositionibus requisitis n^3x fore majus quàm x^4, ideoque n majorem quàm x; & n^3x majus quàm lx^3, ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & denique n^3x majus quàm p^4, & per consequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem singulis radicum æquationis propositæ, at verò duos alios minores.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $mmxx + n^3x \infty x^4 + lx^3 + p^4$; ideoque $mmxx + n^3x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm n. Quare erit $\sqrt{mm + nn}$ semper major quàm x, & x erit inter terminos $\sqrt{mm + nn}$ & n, si major est quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut minor quàm n, quoniam est $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, erit quoque $mmnx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$.

Prop. 7. $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$

Factis transpositionibus requisitis, demonstrabitur esse x minorem quàm m & $\frac{mm}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$.

Prop.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \propto n^3x + p^4 - mmxx$, ideoque si fuerit $x^4 \propto lx^5$, erit $x \propto l$, & $ln^3 \propto n^3x$, & $n^3x + p^4 \propto mmxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 \propto mmxx$, & $x \propto \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$. Unde patet, si fuerit $l \propto \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc est, si habeatur $llmm \propto ln^3 + p^4$; radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$: ac idcirco, substituto in hoc casu in æquatione proposita valore ipsius p^4, nempe $llmm - ln^3$, ipsam esse divisibilem per $x - l$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit quoque $n^3x + p^4$ majus quàm $mmxx$; & si fuerit lx^3 majus quàm x^4, hoc est, l major quàm x, erit & $mmxx$ majus quàm $n^3x + p^4$. Jam quandoquidem æquatio proposita est realis, erit x realis & vel æqualis, vel major, vel minor quàm p. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm p, sitque major quàm l, quoniam tunc $n^3x + p^4$ quoque majus est quàm $mmxx$, erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm $mmxx$, & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x. Ergo in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quòd si autem x minori existente quàm l, ipsa sit æqualis vel major quàm p, quoniam & tunc $n^3x + p^4$ minus est quàm $mmxx$, erit similiter $n^3x + p^3x$ minùs quàm $mmxx$, & consequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x. Igitur in hoc casu erit x minor quàm l, & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quare universaliter apparet, æquationem propositam non habere præter unam radicem realem ipsi l æqualem, cùm est $llmm \propto ln^3 + p^4$; modò quælibet radicum, sive unam, sive tres habuerit, fuerit semper necessariò inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx - n^3x$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, hoc est, $x \infty l$, erit $mmxx \infty - n^3x + p^4$, & per consequens $mmxx \infty - n^3l + p^4$, & $xx \infty \frac{p^4 - ln^3}{mm}$, & $x \infty \sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$. Quòd si ergo l æqualis est $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$, hoc est, si fuerit $llmm \infty p^4 - ln^3$; radix æquationis propositæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$: ideoque si in hoc casu in æquatione proposita loco p^4 substituatur ejus valor, nempe $llmm + ln^3$, apparebit ipsam dividi posse per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l. Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$; & contra, si fuerit l major quàm x, erit etiam $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4. Jam si æquatio proposita est realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n. Esto igitur, quòd x major quàm l sit vel æqualis vel major quàm n; quare cum & p^4 tunc majus sit quàm $mmxx + n^3x$, erit quoque p^4 majus quàm $mmnx + n^3x$; ideoque $\frac{p^4}{mmn + n^3}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Quòd si x, cùm major est quàm l, minor fuerit quàm n, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $mmxx + nnxx$, & consequenter $\frac{p^4}{mm + nn}$ majus quàm xx, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$ major quàm x. Quare in hoc casu x erit major quàm l, & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Quòd si verò x, cùm minor est quàm l, vel æqualis fuerit vel major quàm n, erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque $mmxx + nnxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{mm + nn}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Ergo in hoc casu erit x

minor

minor quàm l, & major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$. Postremò, cùm x minor quàm l, etiam ipsa minor sit quàm n, erit $mmxx+n^3x$ majus quàm p^4, & $mmnx+n^3x$ multò majus quàm p^4, & per consequens x major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$. Igitur x in hoc casu, minor erit quàm l, & major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$.

Quæ cum ita sint, constat universaliter, æquationem propositam non habere nisi unam veram radicem, quæ æqualis est ipsi l, quando est $llmm \infty p^4 - ln^3$, modo unaquæque radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, fuerit semper necessario inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$.

Prop. 10. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur, quòd x major est quàm l, m, n, & p. Deinde erit quoque per transpositionem $lx^3+mmxx+n^3x+p^4 \infty x^4$, & per consequens $lx^3+mx^3+nx^3+px^3$ majus quàm x^4, & $l+m+n+p$ major quàm x. Porrò, quoniam est $x^4 \infty lx^3+mmxx+n^3x+p^4$, erit x^4 majus quàm lx^3+mmxx, & xx majus quàm $lx+mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major sit quàm $lxx+mmx+n^3$, erit multo magis major quàm $l^3+m^3+n^3$, $l^3+lmm+n^3$, & $2lmm+n^3$, & sic de reliquis terminis, quos substituere licet loco x^3, minores quàm x^3. Sic x^4 majus est quàm $l^4+m^4+n^4$, quàm $m^4+n^4+p^4$, & sic de reliquis. Præterea, quoniam x major est quàm n & p, & $lx^3+mmxx+n^3x+p^4 \infty x^4$, erit $lx^3+mmxx+nnxx+ppxx$ majus quàm x^4, ideoque $lx+mm+nn+pp$ majus quàm xx aliquâ quantitate. quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si appelletur zz, habebitur $lx+mm+nn+pp \infty xx+zz$. Quantitas autem hæc incognita zz necessariò minor erit quàm $mm+nn+pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex pri-

ma & majori ex ſecunda, eſſet reliqua lx aut æqualis, aut major quàm xx. Quod foret abſurdum, quandoquidem x demonſtrata eſt major quàm l. Quare habemus hanc æquationem $xx \infty lx + mm + nn + pp - zz$, quæ erit realis, eritque $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$. Manifeſtum verò eſt, quòd $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp$ majus eſt quàm $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x, ideoque $\sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x; ita ut radix propoſitæ æquationis neceſſariò ſit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. 11. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 - mmxx \infty p^4 - n^3x$. Unde, ſi fuerit $x^4 - lx^3 - mmxx \infty 0$, hoc eſt, omnibus per xx diviſis, $xx - lx - mm \infty 0$, erit quoque $p^4 - n^3x \infty 0$. Hoc eſt, ſi fuerit $xx \infty lx + mm$, vel $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \infty n^3x$, vel $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Quare conſtat, ſi fuerit $\frac{p^4}{n^3} \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propoſitæ fore æqualem ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd ſi fuerit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc eſt, xx majus quàm $lx + mm$; erit p^4 etiam majus quàm n^3x, hoc eſt, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Jam exiſtente xx majori quàm $lx + mm$, erit $xx \infty lx + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamſi ſit incognita, ſi vocetur zz: habebitur $xx \infty lx + mm + zz$, & $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + zz}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd ſi fuerit x^4 minus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc eſt, xx minus quàm $lx + mm$; erit & p^4 minus quàm n^3x, hoc eſt, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc exiſtente xx minori quàm $lx + mm$,

erit

erit $xx \propto lx + mm$ minus aliquâ quantitate. Quæ ſi nominetur zz, habebitur $xx \propto lx + mm - zz$, hoc eſt, $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc caſu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare univerſaliter patet, radicem æquationis propoſitæ æqualem eſſe ipſi $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, quando $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipſi $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; Sin ſecus, quamlibet radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, ſemper eſſe inter hoſce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

Prop. 12. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - p^4 \propto n^3x - lx^3 - mmxx$; ideoque ſi fuerit $x \propto p$, erit quoque $n^3x \propto lx^3 + mmxx$, & $x \propto \frac{n^3}{lp + mm}$. Unde conſtat, ſi $lpp + mmp$ æquetur n^3, radicem æquationis fore æqualem ſingulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp + mm}$. Quòd ſi fuerit x^4 majus quàm p^4, hoc eſt, x major quàm p, erit quoque n^3x majus quàm $lx^3 + mmxx$. Jam ſi æquatio propoſita eſt realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m. Quòd ſi fuerit æqualis vel major quàm m, & eadem quantitas x etiam major ſit quàm p, quandoquidem & tunc n^3x majus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x majus quàm $lmxx + mmxx$, & $\frac{n^3}{lm + mm}$ majus quàm x. Quare in hoc caſu erit x major quàm p, & minor quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$. Quòd ſi exiſtente x majore quàm p ipſa minor ſit quàm m, erit n^3x majus quàm $lx^3 + mx^3$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm xx. Ergo in hoc caſu erit x major quàm p, & minor qnàm $\sqrt{\frac{n^3}{l + m}}$. Quòd ſi verò, x minori exiſtente quàm p, ipſa ſit major quàm m, vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc n^3x minus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x

minor quàm $lx^3 + mx^3$, hoc est, xx majus quàm $\frac{n^3}{l+m}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm p, & major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$. Denique, cùm fuerit x minor quàm p, & ipsa etiam minor quàm m, quoniam & tunc n^3x minus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x minus quàm $lmxx + mmxx$, & x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$. Unde constat universaliter, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp+mm}$, cùm est $lpp + mmp$ æquale ipsi n^3; sed cùm inæquales sunt, esse radicem æquationis propositæ necessariò inter majorem & minorem terminorum p, $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$, & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur x fore minorem quàm p, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, $\sqrt{\frac{p^4}{mm}}$, & $\frac{p^4}{n^3}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3+lpp+mmp+n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3x \infty mmxx + p^4 - lx^3$; ideoque si fuerit $x^4 \infty n^3x$, hoc est, $x \infty n$, erit $mmxx + p^4 \infty lx^3$, hoc est, $\frac{mmnn+p^4}{l} \infty x^3$. Quòd si fuerit x major quàm n, erit & $mmxx + p^4$ majus quàm lx^3: sin minor fuerit, erit $mmxx + p^4$ minus quàm lx^3. Jam, si x major est quàm n, & etiam vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx + p^4$ majus est quàm lx^3, multo magis erit $mmxx + ppxx$ majus quàm lx^3, hoc est, $\frac{mm+pp}{l}$ majus quàm x. Ergo in hoc casu erit x major quàm n, & minor quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Quòd si x major fuerit quàm n, & etiam minor quàm p, quoniam & tunc $mmxx + p^4$ majus est quàm lx^3, erit quoque $mmpp + p^4$ majus quàm lx^3, hoc est, x^3 minor quàm $\frac{mmpp+p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Quare

Quare in hoc casu erit x major quàm n, & minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si x minor fuerit quàm n, & vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx+p^4$ minus est quàm lx^3, erit quoque $mmpp+p^4$ minus quàm lx^3, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Ergo in hoc casu erit x minor quàm n, & major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si verò x minor fuerit quàm n, & ipsa etiam minor sit quàm p, quoniam & tunc $mmxx+p^4$ minor est quàm lx^3; erit quoque $mmxx+ppxx$ minus quàm lx^3, & $\frac{mm+pp}{l}$ minus quàm x. Quare in hoc casu, erit x minor quàm n, & major quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Unde universaliter apparet, radicem æquationis propositæ necessariò esse inter maximum & minimum trium terminorum n, $\frac{mm+pp}{l}$, & $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4+lx^3-mmxx+n^3x-p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4+lx^3-mmxx \infty p^4-n^3x$; ideóque si fuerit $x^4+lx^3-mmxx \infty 0$, seu, divisis omnibus terminis per xx, $xx+lx-mm \infty 0$; erit quoque $p^4-n^3x \infty 0$, hoc est, si est $xx \infty -lx+mm$, vel $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, erit $p^4 \infty n^3x$, seu $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Unde patet, si $\frac{p^4}{n^3}$ est æquale ipsi $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit x^4+lx^3 majus quàm $mmxx$, hoc est, $xx+lx$ majus quàm mm, erit quoque p^4 majus quàm n^3x, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Ac proinde cum $xx+lx$ majus sit quàm mm, erit $xx+lx$ majus quàm mm aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licèt sit incognita, vocetur zz, eritque $xx+lx \infty mm+zz$, seu $xx \infty -lx+mm+zz$, hoc est, $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm+zz}$, ideóque x major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Ergo in hoc casu x minor erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit x^4+lx^3 minus

nus quàm $mmxx$, hoc eſt, $xx + lx$ minus quàm mm, erit quoque p^4 minus quàm $n^3 x$, hoc eſt, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc cum $xx + lx$ minus ſit quàm mm, erit $xx + lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz, eritque $xx + lx + zz \propto mm$, vel $xx \propto - lx + mm - zz$, hoc eſt, $x \propto - \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, ideoque x minor erit quàm $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc caſu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Atque ita in genere perſpicuum eſt, cùm $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipſi $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propoſitæ æqualem eſſe ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; ſin minus, quamlibet radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, neceſſariò eſſe inter hoſce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $- \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

FINIS.



JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARUM
LINEARUM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Matheseos
Professoris.



AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
cIↄ Iↄc LIX.

Clarissimo, Doctissimoq; Viro,

D° FRANCISCO à SCHOOTEN,

IOHANNES DE WITT

S. P. D.

Linearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem judicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui; ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, quælibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque resolutionem, pleniùs planiúsque à Recentioribus ostensum est; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectas unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac proinde de iisdem vel plura vel alio modo proposita ac demonstrata quædam desiderare, & supervacuum & in-

ineptum semper existimavi. At verò cum cæterarum linearum curvarum Elementa, prout à Veteribus tradita atque à Recentioribus explicata sunt, diligentiùs considerassem, originem earum è solido peti atque inde ipsas in planum transferri naturali ordini, qui in Mathematicis quàm maximè observandus est, omnino contrarium duxi; quemadmodum & demonstrationes in iisdem Elementis propositas, multis in locis eadem de causa & propter varias rationum compositiones, quibus sæpe innituntur, subobscuras, ac longa Propositionum serie Lectoribus tædio memoriæque oneri esse judicavi. Atque eâ quidem contemplatione excitatus jampridem, dum studiis humanioribus Liberaliumque Artium doctrinæ incumbere mihi otium erat, animadverti, non eas solùm, quas vulgò Coni sectiones *appellârunt, sed & omnes omnino curvas lineas, cujuscunque sint generis, multipliciter quidem ex varia corporum diversimodè compositorum aut figuratorum sectione gigni; at verò earundem singulas infinitis quoque modis in plano generari, ipsarum autem naturam & proprietates ex ea generatione multò faciliùs quàm ex corporum sectione deduci; ac firmiter mihi persuasum habeo, nullam aliam esse causam, quòd linearum curvarum secundi generis ulteriorumque graduum ortus, natura, proprietas, atque essentia, cum exacta specierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac demonstrata sint, quàm quòd tam in tractatione or-*

tus

tus & generationis, quàm in demonstratione essentiæ ac proprietatum linearum curvarum primi generis à naturali & simplicissima via deflexum sit, utpote cum earundem contemplatio, prout in plano simplicissimè & quidem diversimodè generantur, intellectum & imaginationem ad genesin linearum curvarum secundi generis quasi sponte ducat. Cumque eorum, quæ antehac, dum per otium licuit, eò spectantia meditatus sum, tu nunc, amicissime Schooteni, *copiam tibi fieri desideres, en, quantum in me est, desiderio tuo satisfacio; quæque de eodem argumento à me quondam conscripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi mitto, tuique omnino juris facio; cætera autem, quæ sparsim tantùm annotata sunt, si modò graviora id ferent negotia, recolligam, debitoque ordine conjungam; recollecta, atque ordinata suo quoque tempore tibi missurus; Vale.* Hagæ *Com*: VIII *Octobr. Anni* M. DC. LVIII.

Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

Fig. IV.

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CURVARUM LINEARUM.

LIBER PRIMUS.

Caput I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo sui puncto sibi semper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujusdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem sit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum semper per prædictum mobile punctum transiens secum ducat, atque ita simul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis intersectione curva describatur linea; recta, quæ, uti prædictum est, sibi semper parallela movetur aut incedit, *Describens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei est deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

At quos *describens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *describentis* pars, quæ inter *Polum*, & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *describens* secum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *describente* secatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

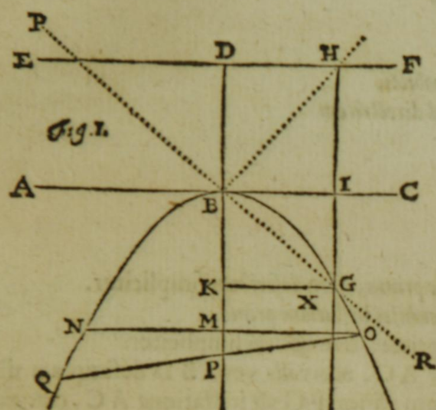
IX.

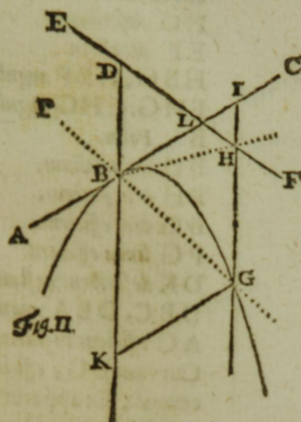
Cùm *describens* per *Polum* transit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, esse tam *describentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *statione prima* constitutum dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit in tali ipsas positione considerabimus.

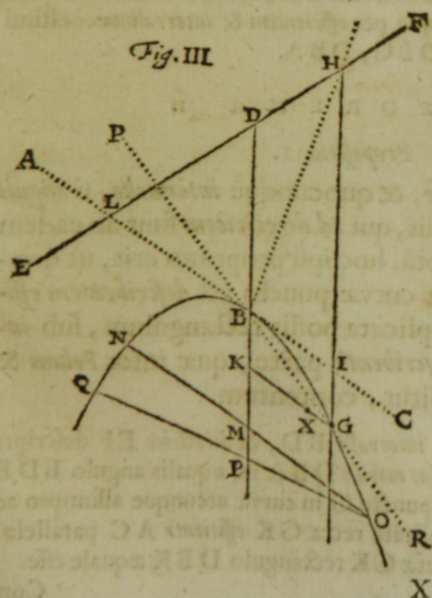
X.

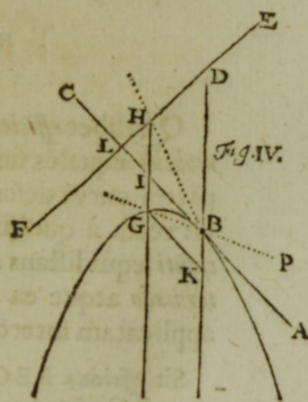
Quamlibet curvam, intersectione, uti prædictum est, in plano genitam, descriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* consideratis, ut exhibentur ac sibi invicem junguntur *in statione prima*; adeò ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipsa *describente* quàm cum *crure patiente* in eadem statione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque constituat.

Ut in appositis figuris, si recta HG sibi semper parallela certo sui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam EF, codemque illo motu secum ducere crus BH anguli HBG, circu-









lariter

lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus B H semper transeat per prædictum ipsius H G punctum H, simulque alterius cruris B G ac dictæ lineæ H G intersectione G describatur curva linea B G: erunt

H G *describens.*

E F *directrix.*

H B G, H B P *anguli mobiles.*

F H G, E H G *anguli ad directricem.*

B *Polus.*

B D *intervallum.*

B H *crus patiens.*

B G *crus efficiens.*

P G *linea efficiens.*

D K *describens in statione prima*, sive *describens* simpliciter.

D B C, D B A *anguli mobiles in statione prima.*

A C *efficiens in statione prima*, sive *efficiens* simpliciter.

Curvam B G, *efficiente* A C, *intervallo* verò B D descriptam dicemus; Et apparet, cùm *efficiens* P G est in statione A C, *crus patiens* B H coïncidere cum *intervallo* B D; ac *describentem* H G tunc esse in statione D K, atque per *efficientem* & *intervallum* constitui utrinque *angulos mobiles* D B C, D B A.

THEOREMA I.

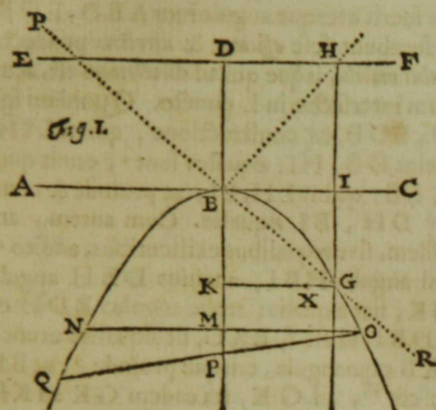
Propositio 1.

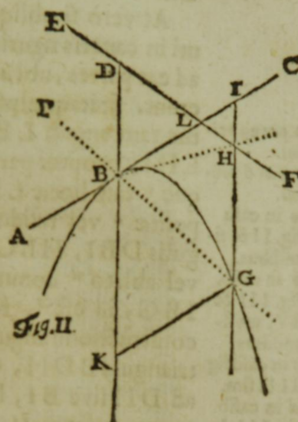
Quàlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo*, si *anguli mobiles* æquales sint iis, qui *ad directricem* sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quævis recta à quolibet curvæ puncto ad *describentem efficienti* æquidistans applicata possit rectangulum, sub *intervallo* atque ea *describentis* parte, quæ inter *Polum* & applicatam intercipitur, contentum.

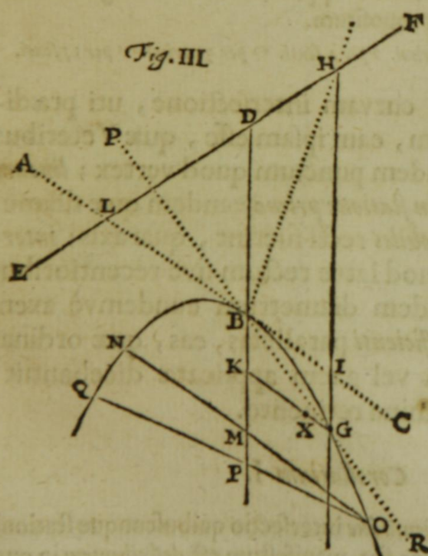
Sit *efficiente* A B C, *intervallo* B D, & *directrice* E F descripta curva B G; ita ut *angulus mobilis* D B A sit æqualis angulo E D B *ad directricem*, sitque à puncto G in curva utcunque assumpto ad *describentem* D B K applicata recta G K *efficienti* A C parallela: dico quadratum applicatæ G K rectangulo D B K æquale esse.

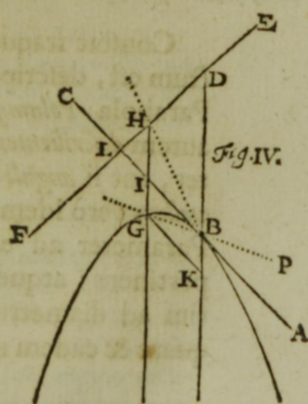
Con-

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum G, veluti in HBG & HIG: si tam *angulus mobilis* quàm is









qui ad *directricem* eſt rectus ſit, uti in prima figura, erit [1] ut HI ad IB, ita IB ad IG, id eſt [2], ut DB ad GK, ita GK ad BK. ac proinde [3] quadratum rectæ GK rectangulo DBK æquale erit.

At verò ſi obliquus fuerit uterque angulorum ABD, EDB, uti in cæteris figuris, ſecabunt ſeſe *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* eſt, acuti erunt. ſit itaque ipſarum interſectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli LBD, LDB, ex conſtructione, quàm LIH, LHI, propter parallelas DB, HI, æquales ſunt [4]; erunt quoque [5] tam lineæ LD, LB, quàm LH, LI; ac proinde & compoſitæ [a] vel reſiduæ [b] DH, BI æquales. Cum autem, angulis DBI, HBG iiſdem, ſive æqualibus exiſtentibus, addito [c], vel ablato [d] communi angulo HBI, angulus DBH angulo IBG, id eſt [6], BGK, fiat æqualis; atque angulus BDH ex conſtructione angulo DBI, id eſt [7], BKG, ſit æqualis: erunt [8] triangula BDH, GKB æquiangula, eritque proinde [9], ut BD ad DH ſive BI, hoc eſt [10], ad GK, ita eadem GK ad KB. quare, ut ſupra [11], quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale erit. Quod eſt propoſitum.

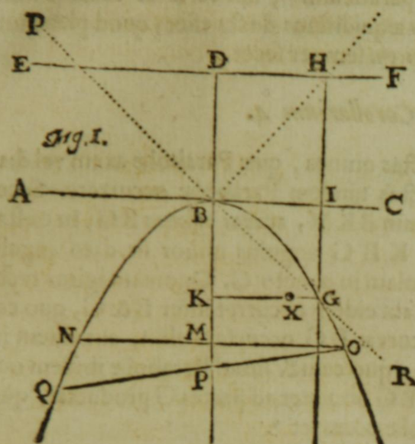
[1] *per Cor 8 ſexti Eucl.*
[2] *per 34 primi.*
[3] *per 17 ſexti*
[4] *per 29 primi.*
[5] *per 6 primi.*
[a] in caſu fig. II & ſimilibus.
[b] in caſib. fig. III & IV, aut ſimilibus.
[c] in caſu fig. II & ſim.
[d] in caſib. fig. III & IV, aut ſimilibus.
[6] *per 29 primi.* [7] *per 29 primi.* [8] *per 32 primi.* [9] *per 4 ſexti.* [10] *per 34 primi.* [11] *per 17 ſexti.*

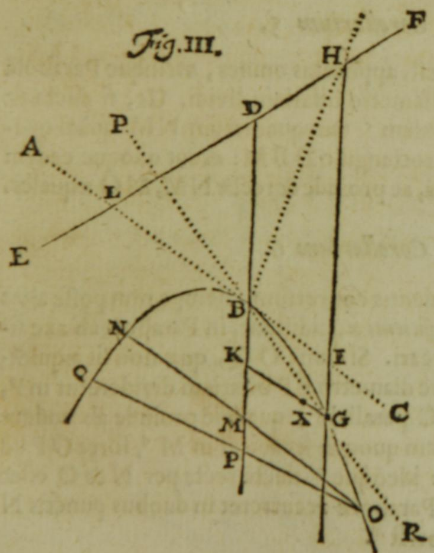
Conſtat itaque, curvam interſectione, uti prædictum eſt, deſcriptam, eam ipſam eſſe, quæ Veteribus Parabola; *Polumq;* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *deſcribentem in ſtatione prima* eandem quæ diameter, aut ſi *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum ſive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvè axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retinento.

Corollarium I.

Cum *deſcribentis efficientisque* interſectio quibuſcunque ſtationibus in uno tantùm puncto fiat, manifeſtum eſt, *deſcribentem* in quacunque

cunque





cunque statione, id est, rectas omnes diametro æquidistantes, in uno tantùm puncto Parabolæ occurrere.

Corollarium 2.

Cumque continuo *describentis* à *Polo* recessu major majorque semper fiat angulus, quem *crus efficiens* constituit ad *lineam efficientem in statione prima*, veluti GBI, manifestum est, quamlibet rectam à *Polo* ad quodlibet curvæ punctum ductam, ut, ex. gr., BG, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.

Corollarium 3.

Constat præterea angulum GBK indefinitè quidem diminui, omniq́ue proposito angulo rectilineo minorem reddi posse; sed *crus* tamen *efficiens* BG nunquam cum *describente* BK coincidere, multò minùs ipsam transire: ad hoc enim necessum foret, ut *crus patiens*

[1] per 29 primi. BH *directrici* EF foret parallelum [1], aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum *directricem* semper secet.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKG [2], at verò Parabolam in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occursura est [3], aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu priùs Parabolæ occurret [4].

[2] juxta Cor. præcedens.
[3] per Corol. 2 hujus.
[4] per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Ut, si ducta sit applicata NMO, quoniam [5] tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

[5] per 1 hujus.

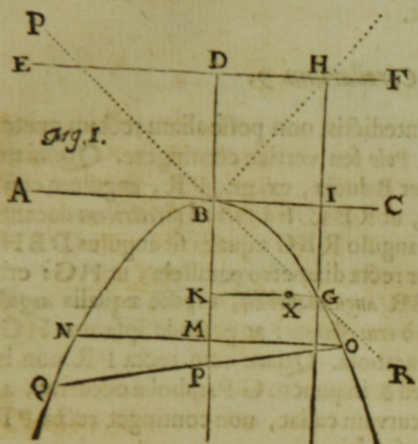
Corollarium 6.

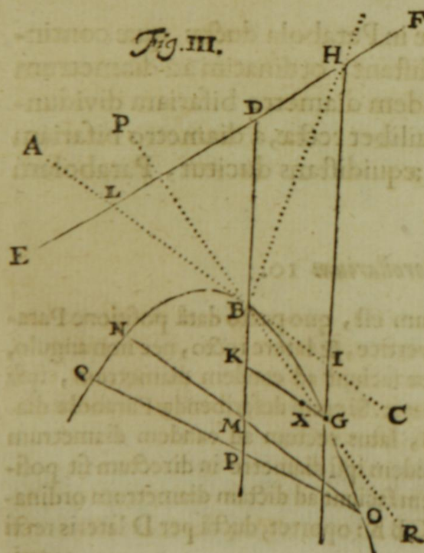
Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M [6], foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque [7] ducta recta per N & Q esset diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest [8].

[6] per Corol. præcedens.
[7] per 2 sexti.
[8] juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non solùm applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad can-

eandem ordinatim applicatæ sunt: & si diameter rectam quamlibet in Parabola ductam bifariam dividat omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit.





Corollarium 7.

Ex demonstratis quoque facilè colligitur, applicatarum quadrata ad se invicem esse, sicut ad se invicem sunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Ut, si applicatæ sint GK, NM, erit [1] quadratum rectæ GK ad quadratum ipsius NM, ut rectangulum DBK ad rectangulum DBM, id est [2], ut BK ad BM.

[1] *per 1 huius.*

[2] *per 1 sexti.*

Corollarium 8.

Ex ipsa porrò descriptione manifestum est, *efficientem in statione prima*, id est, rectam, quæ per *Polum* sive verticem applicatis æquidistans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem secare. Sum-

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione B G, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut G B C: atque adeò punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* A B C cadet.

Corollarium 9.

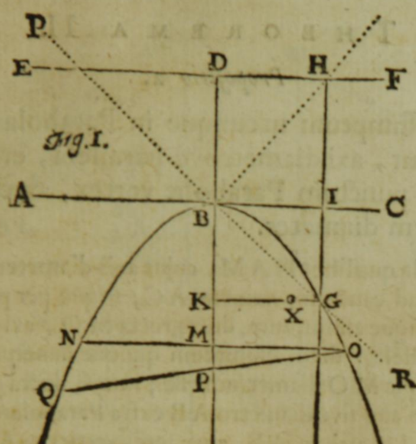
Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., P R, angulum constituit cum *efficiente* A C, ut R B C, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta B H, ita ut eidem angulo R B C æqualis sit angulus D B H, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut H G: erit ea ipsa *describens*, & H B R *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* D B C; B R verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum H G, B R intersectio G in Parabola. Quare cum recta P R non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota B G recta [3] intra curvam cadat, non continget recta P R Parabolam, sed eandem secabit.

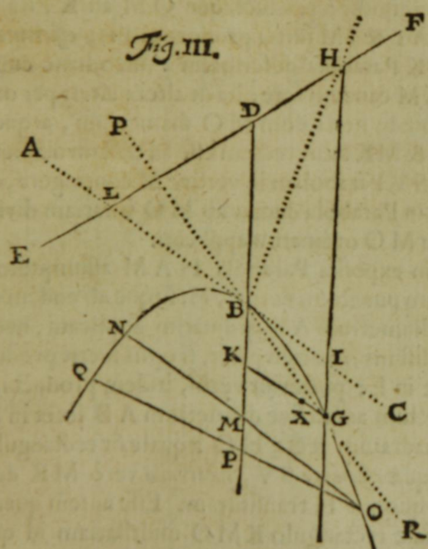
[3] *per Corol.* 1 *hujus.*

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit B K, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens B D, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ A B K vel C B K: oportet, ductâ per D lateris recti termi-





terminum rectâ EDF in angulo EDB ipsi ABD æquali, *efficiente* AC, & *intervallo* BD, ad *directricem* EF curvam describere, ut NBG: eritque hæc ipsa, quæ describenda proponitur Parabola.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per aſſumptum utcunque in Parabola punctum recta ducatur, axi diametrovè parallela, erit quoque aſſumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

Sit Parabola quælibet H A M, cujus axis diameterve A B, & latus rectum ad eandem pertinens A C; ſitque per punctum M, in curva utcunque aſſumptum, ducta recta M O, axi ſive diametro A B parallela: dico aſſumptum quoque punctum M verticem, dictamque M O diametrum eſſe; imò ſi, ductâ per M rectâ S V, ita ut ab axe ſive diametro A B extra Parabolam abſcindat portionem A I æqualem A B, quæ inter verticem A & applicatam M B intercipitur; productâque O M ad K, ita ut ſit M K ipſis A B vel A I & I M tertia proportionalis, *efficiente* S V *intervallo* verò M K Parabola deſcribatur: dico hanc cum expoſita Parabola H A M eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non ſolùm M O diametrum, atque M verticem fore, ſed & M K latus rectum eſſe ad dictam diametrum M O pertinens, & S V Parabolam in vertice M contingere, omneſque ipſi parallelas in Parabola ductas ab M O biſariam dividi, atque ad hanc ipſam M O ordinatim applicari.

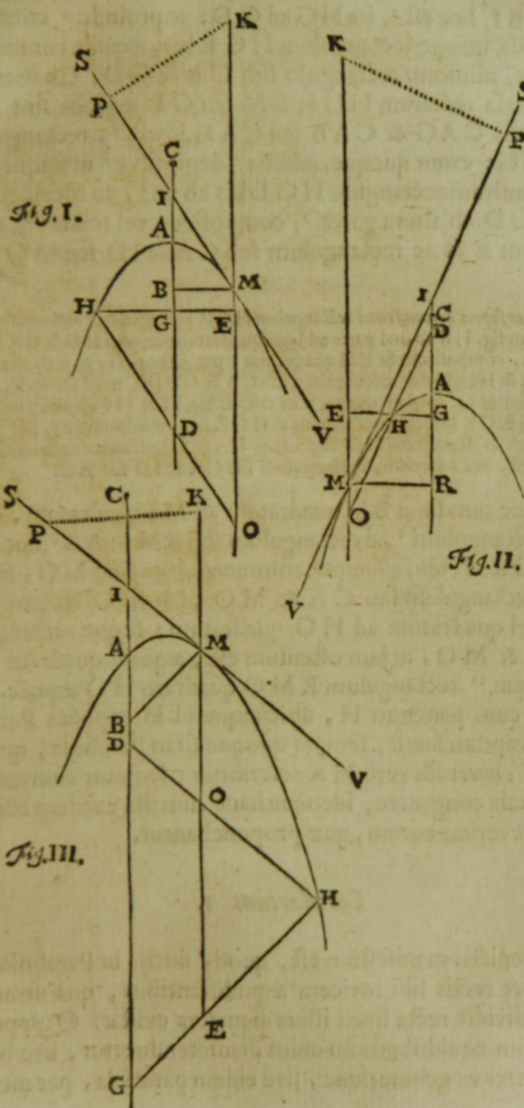
Sit enim in expoſita Parabola H A M aſſumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; ſitque ab eodem ducta H G ad axem ſive diametrum A B ordinatim applicata, nec non H O ipſi S V æquidiſtans, quarum prior, ſi opùs fuerit producta, rectæ K O occurrat in E; poſterior verò, itidem producta, ubi opùs fuerit, prædictum axem ſive diametrum A B ſecet in D. Et apparet [1], ſi quadratum rectæ H O æquale ſit rectangulo K M O, Parabolam, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K deſcribetur, per punctum quoque H tranſituram. Eſſe autem quadratum rectæ H O æquale rectangulo K M O multifariam id quidem, &, meo ſaltem judicio, breviter ſimpliciterque ſatis in eum qui ſequitur modum demonſtratur.

Quoniam eſt [2] ut C A ad M B, ita M B ad B A, erit, dupli-

catis

[1] *ex* 1 *hujus.*

[2] *per* 1 *hujus*, & 17 *ſexti.*


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.

catis consequentibus, ut C A ad duplam M B seu ad G E bis, ita M B ad B I, hoc est [3], ita H G ad G D: ac proinde [4] contentum sub mediis, nempe rectangulum H G E bis, æquale contento sub extremis, nimirum rectangulo sub C A & G D. Unde cum bina quadrata rectarum H G & B M seu G E æqualia sint [5] binis rectangulis C A G & C A B seu C A I, id est [6], rectangulo sub C A & I G: erunt quoque, additis [a] demptisve [b] utrinque æqualibus, nimirum rectangulo H G E bis ab una, ac rectangulo sub C A & G D ab altera parte [7], composita [a] vel residua [b], nempe quadratum E H ac rectangulum sub C A & I D seu M O æqualia [c].

[3] *per 29 primi, & 4 sexti.*
[4] *per 16 sexti.*
[5] *per 1 hujus.*
[6] *per 1 secundi.*
[a] in casu fig. I & similibus.
[b] in casu fig. II & III ac similibus.

[7] *quippe per supra demonstrata rectangulum* H G E *bis æquale est rectangulo sub* C A *&* G D. [c] in casu enim fig. I, si ab una parte ad bina quadrata rectarum H G & G E addatur rectangulum H G E bis, compositum fit E H quadratum, per 4 secundi; ac si ab altera parte ad rectangulum sub C A & I G addatur rectangulum sub C A & G D, fit, per I secundi, rectangulum sub C A & I D seu M O. Eodem modo, si in casibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum H G & G E auferatur rectangulum H G E bis, residuum erit, per 7 secundi, E H quadratum; ac si ab altera parte à rectangulo sub C A & I G auferatur rectangulum sub C A & G D residuum erit, per 1 secundi, rectangulum sub C A & I D seu M O.

Ideoque cum sit ut B M quadratum ad M I quadratum, sive ut C A B rectangulum [8] ad rectangulum sub K M & A B [9], hoc est [10], ut C A ad K M, seu, assumptâ communi altitudine M O, ut prædictum rectangulum sub C A & M O ad K M O rectangulum, ita [11] E H quadratum ad H O quadratum; sitque rectangulum sub C A & M O, ut jam ostensum est, æquale quadrato E H: erit quoque [12] rectangulum K M O quadrato H O æquale.

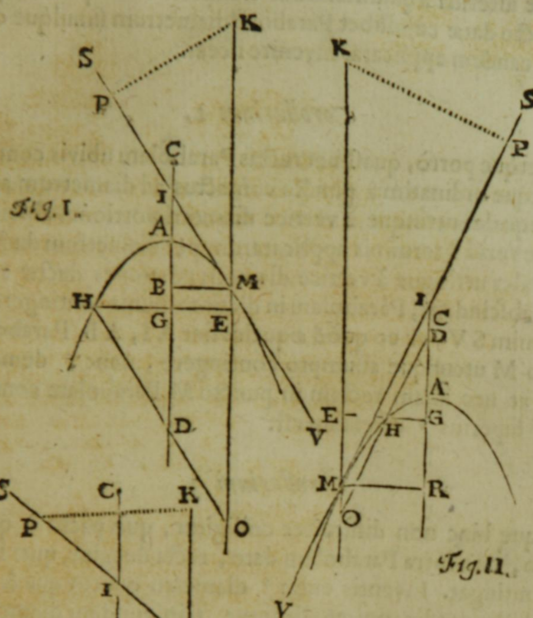
Unde cum punctum H, ubicunque id in exposita Parabola A H assumptum fuerit, semper quoque sit in Parabola, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K describitur: sequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem esse; ita ut constet veritas eorum, quæ proponebantur.

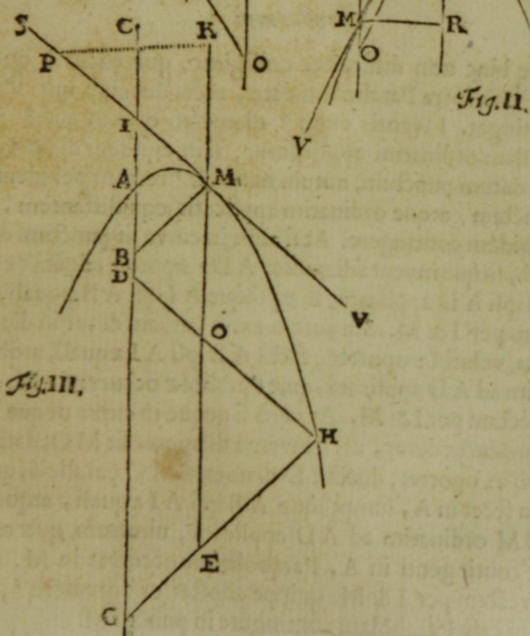
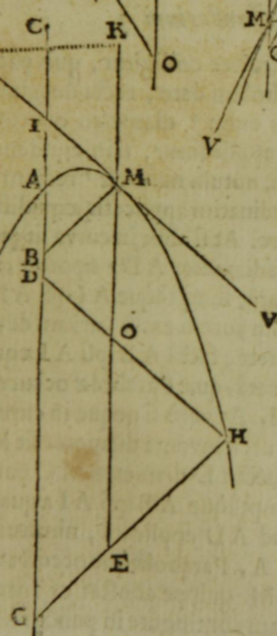
[8] *per 1 hujus, & ex hypothesi.*
[9] *per 17 sexti, & ex hypothesi.*
[10] *per 1 sexti.*
[11] *per 4 & 22 sexti.*
[12] *per 14 quinti.*

Corollarium I.

Ex antedictis manifestum est, quòd, ductis in Parabola binis quibuslibet rectis sibi invicem æquidistantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter existat. Quippe quæ per medium æquidistantium unius diameter ducetur, sive hæc sit ipsa diameter ex generatione, sive eidem parallela, per medium

quo-


S
K
K
S
P
P
C
Fig.I.
I
A
B
M
H
G
E
D
E
V
I
C
D
A
G
H
M
R
O
Fig.II.
V



S
C
K
P
I
A
M
B
D
V
O
Fig.III.
H
E
G

[1] per conclusionem 6 Cor. 1 hujus.

quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Atque ita apparet, quo pacto datæ cujuslibet Parabolæ diametrum simulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

Corollarium 2.

Patetque porrò, quaslibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abscindere; &, vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abscindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim S V, ex eo quòd æquales sint A I, A B, Parabolam in puncto M utcunque assumpto contingere, nunc [2] demonstratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere posse, superiùs [3] ostensum est.

[2] in 2 hujus.

[3] per 9 Cor. 1 hujus.

Corollarium 3.

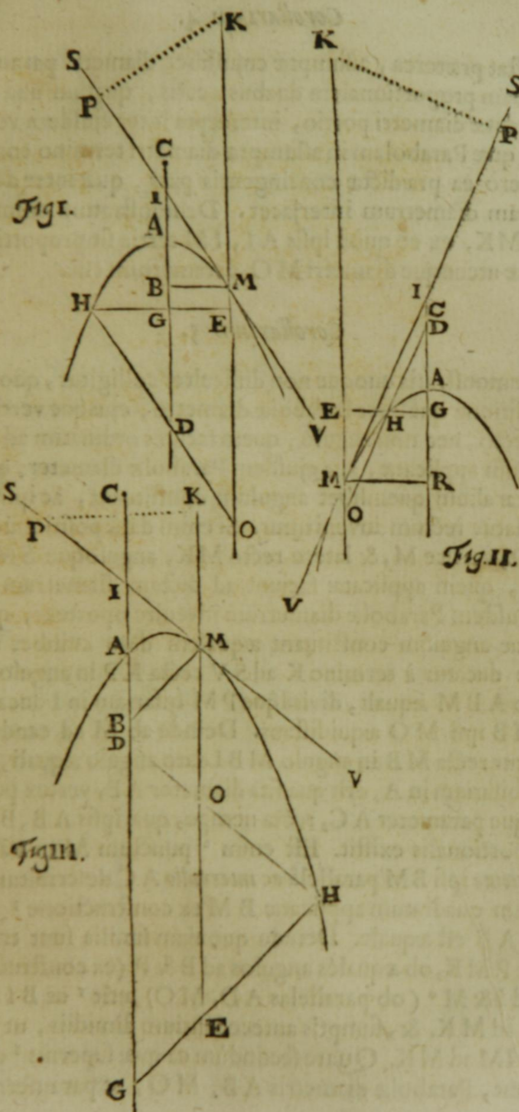
Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim [4] diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, si in ejusdem diametri termino sit datum punctum, notum nunc est [5] rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidistantem, Parabolam ibidem contingere. At si alibi in curva sit punctum datum, veluti M, sitque inventa diameter A D: oportet, ductâ ex M rectâ M B ipsi A D applicatâ, sumptâque A I ipsi A B æquali, ducere rectam per I & M. Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I: oportet, factâ A B ipsi A I æquali, atque B M ordinatim ad A D applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M, ducere rursus rectam per I & M. At verò si neque in curva neque in diametro producta detur, ut, si inventa diameter sit M O, datumque punctum I: oportet, ductâ I D diametro M O parallelâ, quæ Parabolam secet in A, sumptâque A B ipsi A I æquali, atque ex B ductâ B M ordinatim ad A D applicatâ, nimirum, quæ æquidistans sit contingenti in A, Parabolæque occurrat in M, ducere iterum rectam per I & M. quippe constat ex antedictis [6], ipsam I M omni casu Parabolam contingere in puncto M.

[4] per 1 Corol. 2 hujus.

[5] per 8 & 9 Corol. 1 hujus.

[6] per 2 hujus, ejusque Cor. 2.

Co-


Fig. I.
S
K
P
C
I
A
B
M
H
G
E
D
O
Fig. II.
K
S
P
I
C
D
A
E
H
G
V
M
R
O
V
Fig. III.
S
C
K
P
I
A
M
B
D
V
O
H
E
G

Corollarium 4.

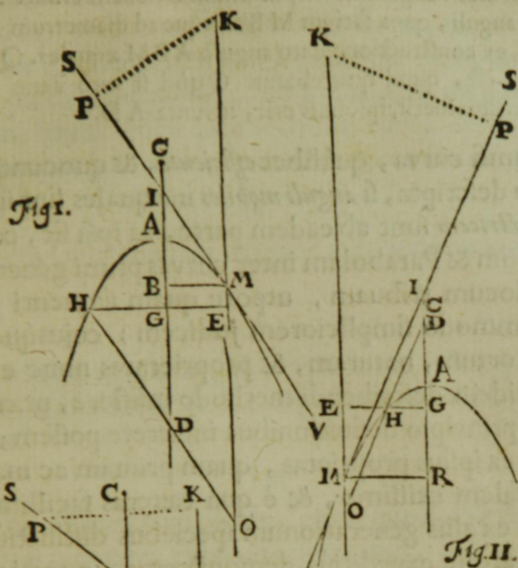
Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est [1], rectam MK, ex eo quòd ipsis AI, IM tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri MO parametrum esse.

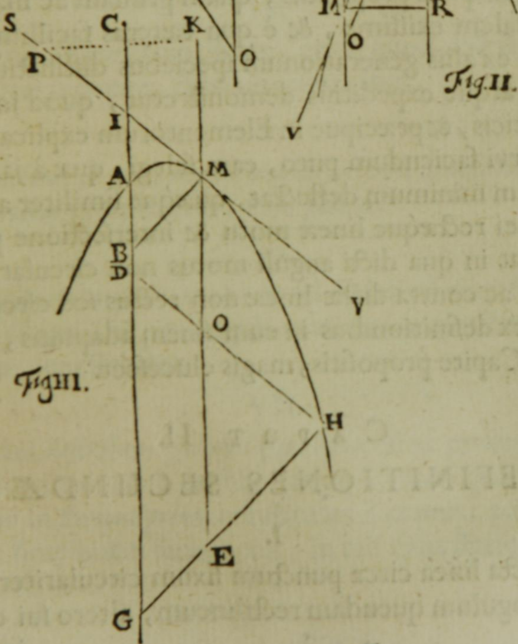
[1] *in 2 hujus.*

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituant, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ positione diametro MO, vertice M, & latere recto MK, anguloque SMK vel VMK, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum MO, aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituant æqualem dato cuilibet angulo ABM: ducatur à termino K ad SV recta KP in angulo KPV ipsi dato ABM æquali, divisâque PM bifariam in I ducatur per I recta IB ipsi MO æquidistans. Deinde ab M ad eandem IB applicetur recta MB in angulo MBI dato angulo æquali, divisâque BI bifariam in A, erit quæsita diameter AB, vertex punctum A, ejusque parameter AC, recta nempe, quæ ipsis AB, BM tertia proportionalis existit. Est enim [2] punctum M in Parabola, quæ *efficiente* ipsi BM parallelâ ac *intervallo* AC describitur, quandoquidem quadratum applicatæ BM ex constructione [3] rectangulo CAB est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula BIM & PMK, ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M [4] (ob parallelas AD, MO), erit [5] ut BI ad IM, ita PM ad MK. &, sumptis antecedentium dimidiis, ut AI ad IM, ita IM ad MK. Quare secundùm ea quæ superiùs [6] demonstrata sunt, Parabolæ diametris AB, MO, ac parametris AC, MK,

[2] *per 1 hujus.*
[3] *per 17 sexti.*
[4] *per 29 primi.*
[5] *per 4 sexti.*
[6] *in 2 hujus.*


K
S
P
C
I
Fig. I.
A
M
B
H
G
E
D
V
O
K
S
P
I
C
D
A
G
E
H
V
M
R
O
Fig. II.
V


S
C
K
P
O
I
A
M
B
D
Y
O
Fig. III.
H
E
G

MK, in dictis angulis descriptæ omnino eædem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quòd si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiamsi curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciorem judicem; cujusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expositurus eidem describendi methodo insistere, præmissisque in principio definitionibus inhærere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctiùs appareat atque expeditiùs demonstretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & intersectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis elucescet.

CAPUT II.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota semper per idem applicati cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac ejusdem lineæ motæ intersectione curva describatur, appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*.

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei est deinceps, similiter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quod à *describente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à describente secatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *describens efficienti* parallela est ac proinde nulla ipsarum intersectio existit, tam *efficientem* quàm *describentem* in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione considerabimus.

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *describentem* interjacet, quàm eam *describentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Ut in apposita figura, si recta A B C [a] circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque suo promovere & secum ducere angulum B E C [a]; ita ut crus E B semper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ K L, ac prædicta A B C mobilis semper transeat per idem punctum cruris E B, ex. gr., per B, simulque alterius cruris E C & dictæ lineæ A B C intersectione C describatur curva linea *c* C, sitque ducta A D cruri E C parallela: apparet, quò magis recta A B C ad ipsam A D accedit, eò minorem fieri angulum E C B. ac tandem cùm ipsa A B C pervenit ad A D, ita ut cum ipsa coïncidat, eundem angulum E C B tunc penitus evanescere: cum A D, ac proinde & dicta A B C, statione illâ, cruri E C parallela sit; ita ut tunc dictum crus E C sive recta C E M eadem sit cum linea G F H, nimirum suppositâ D F ipsi B E, æquali, eruntque

[a] quæ quidem recta A B C, ut & angulus B E C in figura quatuor distinctis stationibus exhibentur.

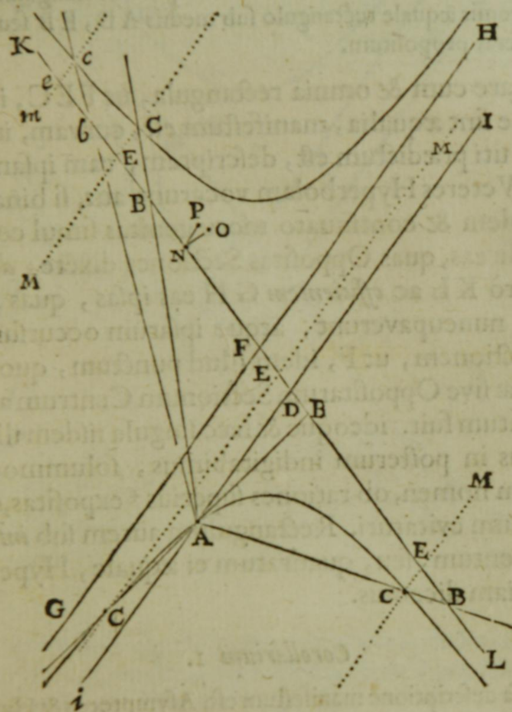
A B C *describens* in stationibus diversis.
K L *directrix*.
B E C, B E M, sive D F H & D F G *anguli mobiles*.
A *Polus*.
E B *crus patiens*.
E C *crus efficiens*.
M C *linea efficiens*.
G F H *efficiens in statione prima*, seu *efficiens* simpliciter.
A D I *describens in statione prima*, seu *describens* simpliciter.
E B seu F D & A D utrumque *intervallum*.

THEOREMA III.

Propositio 3.

Quibuslibet *angulis mobilibus* ac quibuscunque *intervallis*, juxta definitiones præmissas descriptâ curvâ, hoc ipsi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum ſub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale ſit ei, quod ſub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* B E C, & quibuſcunque *intervallis* E B, ſeu F D & A D, *directrice* K D L, deſcripta curva *c* C; ita ut *efficiens* ſit G F H, ſitque à puncto C in curva utcunque aſſumpto ad *directricem* ducta C E *efficienti* G F H, ac proinde & *intervallo* A D parallela: dico rectangulum F E C æquale eſſe A D F rectangulo, ſive ei, quod ſub A D, E B continetur.

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuère, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum C, veluti in B E C, & A B C, quoniam æquales sunt rectæ E B, F D, additâ vel ablatâ utrinque F B vel E D: erunt quoque rectæ B D, F E æquales; cumque [1] propter parallelas E C, A D æquiangula sint triangula B D A, B E C: erit [2] ut B D, id est, F E, ad D A, ita B E ad E C: ideoque [3] rectangulum F E C sub extremis æquale rectangulo sub mediis A D, E B seu A D F. Quod erat propositum.

[1] *per 29 primi.* [2] *per 4 sexti.* [3] *per 16 sexti.*

Quare cum & omnia rectangula, ut F E C, inter se quoque sint æqualia, manifestum est, curvam, intersectione uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quam Veteres Hyperbolam vocarunt; aut, si binas curvas eodem & continuato motu genitas simul consideres, esse eas, quas Oppositas Sectiones dixère; *directricem* verò K L ac *efficientem* G H eas ipsas, quas Asymptotos nuncupaverunt, atque ipsarum occursum sive intersectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ sive Oppositarum Sectionum Centrum ab ipsis appellatum fuit. ideoque & hæc singula iisdem illis nominibus in posterum indigitabimus, solummodo sectionum nomen, ob rationes superiùs [4] expositas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem sub *intervallis* contentum, seu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

[4] *in Epistola ad Schotenium.*

Corollarium I.

Ex ipsa descriptione manifestum est, Asymptotos & Hyperbolam magis magisque ad se invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad distantiam, datâ quâlibet distantiâ minorem; cujus tamen, si demonstrationem exactiorem desideres, data distantia sit recta N O, ad Asymptoton F K perpendicularis. Sumptâ igitur N P, quæ eâdem N O minor sit, si fiat ut N P ad A D, ita D F ad F *e*, ac per *e* ducatur *e c* ipsi N P æqualis atque Asymptoto F H æquidistans: erit [5] rectangulum F *e c* Potentiæ A D F æqua-

[5] *per 16 sexti.*

æquale, ideoque juxta ea, quæ [6] demonſtrata ſunt, punctum C in Hyperbola. Eſt autem & *c e* ipſi P N æqualis, hoc eſt, datâ di- [6] *in 3 hujus.*

ſtantiâ N O minor. Quare & perpendicularis à puncto *c* ad Aſymptoton F K ducta, id eſt, diſtantia Hyperbolæ à prædicta Aſymptoto, ibidem datâ diſtantiâ N O multò minor erit.

Corollarium 2.

Atque ita ſimul apparet, rectas omnes, quæ ductæ ex quolibet puncto intra angulum, qui ad verticem eſt ei, qui Hyperbolam continet, per centrum tranſeunt, vel Aſymptotorum alterutram ſecant, Hyperbolæ tandem occurrere, productasque eandem, & in

in uno tantùm puncto, secare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

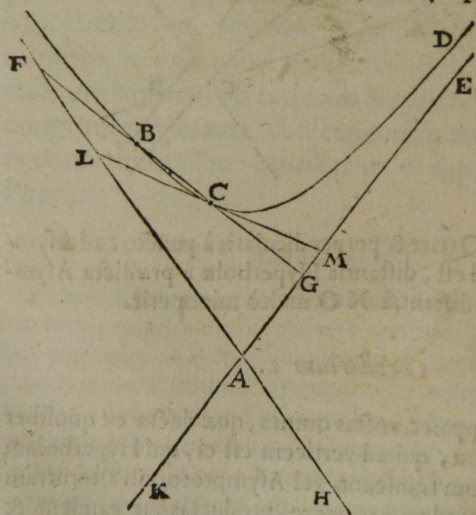
Constat præterea, *efficientem* in quacunque statione, id est, rectas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & quidem in uno tantùm puncto, occurrere, productasque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis intersecent.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti KAE, HAF, ductæ FBCG, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque MC eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam FBCG quàm rectā MCL utrique Asymptoto KAE & HAF intra angulum EAF occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem FBCG vel MCL aut Asym-



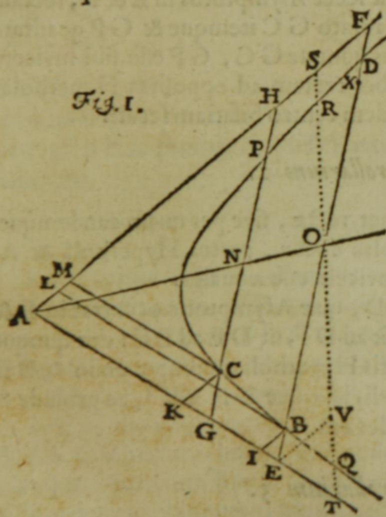
Aſymptotorum alterutri parallela eſſet, aut, ſi vel huic vel illi Aſymptoto extra angulum E A F occurreret, ex puncto intra angulum K A H ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta hanc vel illam Aſymptoton ſecaret; ideoque [1] curvæ in uno tantùm puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem ſecaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra id quod ponitur. Ac proinde conſtat propoſitum.

[1] *per 2 & 3 Cor. 3 hujus.*

THEOREMA V.

Propoſitio 5.

Aſſumptis, vel in una eademque, vel in oppoſitis Hyperbolis, duobus utcunque punctis, ductisque per eadem ſive unâ rectâ ſive duabus, ſibi mutuò parallelis: erunt rectangula ſub ductæ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Aſymptoto utrinque interceptis, ſibi invicem æqualia.



Sint, vel in eadem, vel in oppoſitis Hyperbolis B P C D, cujus Aſymptoti A E, A F, aſſumpta utcunque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ B D, C P ſibi invicem parallelæ Aſymptotiſque occurrentes in punctis E, F, G, H [a]: dico rectangulum E B F rectangulo G C H æquale eſſe.

Ductis enim per eadem puncta B & C rectis, utrique Aſymptoto parallelis alteràque Aſymptoto terminatis, B I, B L, C K, C M: erit [1], propter rectangula I B L & K C M [2] æqualia, ut I B ad K C, hoc eſt [3], ut E B ad

[a] qui utique occurſus in caſu primæ figuræ fit intra angulum E A F, per 4 hujus.
[1] *per 16 ſexti.*
[2] *per 3 hujus.*
[3] *per 29 primi, & 4 ſexti.*

[4] per 16 sexti.

ad G C, ita C M ad B L, id est, ita C H ad B F. ac proinde [4] rectangula EBF & GCH æqualia sunt. Quod demonstrandum erat.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur BD, quæ utrique Asymptoto occurrat in punctis E & F [a], rectangula EBF, FDE sibi invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum transeat, ut C P in tertia figura, eâdem demonstratione comprobatum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqualia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ. Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ utcunque veluti C G P in eadem figura, eidem ubivis alia recta æquidistans ducatur B D, quæ secet Asymptotos in E & F, rectangulum E B F vel F D E quadrato G C itemque & G P quadrato æquale esse: sequitur, ipsas quoque G C, G P esse sibi invicem æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas per centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque, sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Asymptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

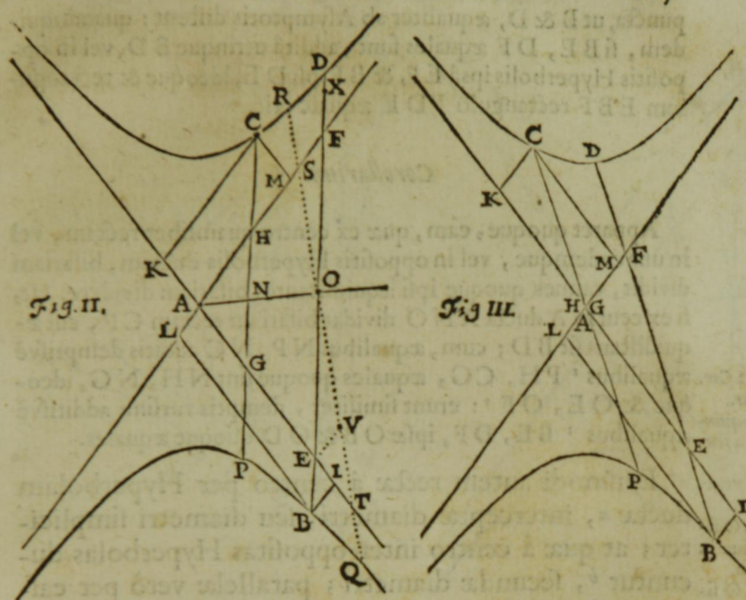
Ductâ enim utcunque B D, quæ Asymptotis occurrat in E & F, cum ex antedictis [5] B F sit ad D F, ut D E ad B E: erit quoque dividendo [6], vel, in oppositis Hyperbolis, componendo [7], B D ad D F, ut eadem B D ad B E, ideoque D F, B E [8], ac proinde & B F, D E sibi invicem æquales erunt.

[5] per 5 hujus, & 16 sexti.
[6] per 17 Quinti.
[7] per 18 Quinti.
[8] per 9 Quinti.

Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio

sui



sui puncto in Hyperbola esse. Si enim præter D & B aliud quoddam ipsius D B punctum, ex. gr. X, in Hyperbola foret, esset [1] X F ipsi B E ac proinde & ipsi D F æqualis, pars toti, quod est absurdum.

[1] per Coroll. præced.

Corollarium 4.

Facilè autem apparet, & conversum quoque propositionis verum esse: nempe, si, iisdem positis, & rectangulis E B F, G C H æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola sit, & alterum quoque fore in eadem vel opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt A E & A F. Ex eo enim quòd æqualia sint rectangula E B F & G C H demonstrabitur æqualia quoque esse rectangula A I B & A K C eâdem methodo, quâ conversum supra ostensum fuit. ideoque si punctum B sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum C in eadem aut in opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt A E, A F, & vice versâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum esto; imò & idem erit in eadem linea, si dicta

[2] per 3 hujus.

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si B E, D F æquales sunt, additâ utrinque B D, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ E F, & B F ipsi D E, ideoque & rectangulum E B F rectangulo F D E æquale erit.

Corollarium 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta A N O dividat bifariam rectam C P, cui æquidistans sit B D; cum, æqualibus N P, N C additis demptisvè æqualibus [1] P H, C G, æquales quoque sint N H, N G, ideoque & O E, O F [2]: erunt similiter, demptis rursum additisvè æqualibus [3] B E, D F, ipsæ O B & O D quoque æquales.

[1] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[2] *per 9 quinti, & 4 sexti.*
[3] *per 2 Cor. 5 hujus.*

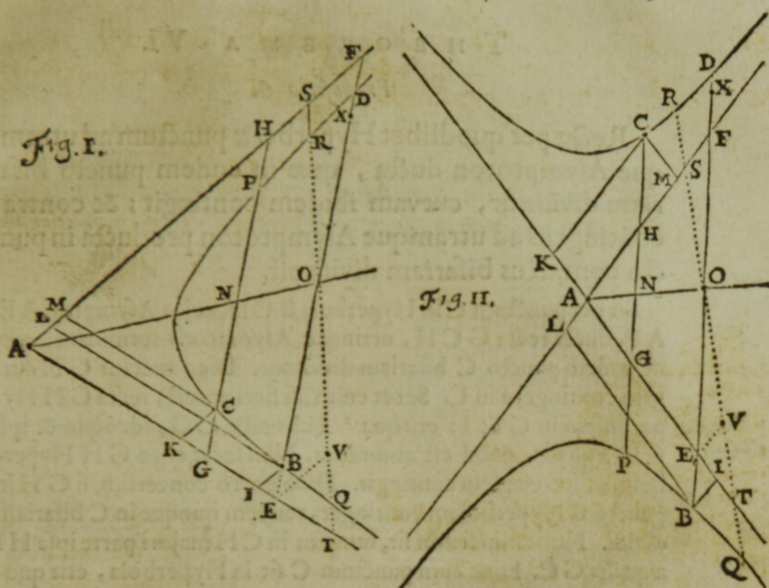
Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ [a], interceptæ diametri, seu diametri simpliciter; at quæ à centro inter oppositas Hyperbolas ducuntur [b], secundæ diametri; parallelæ verò per easdem bifariam sectæ [c], ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à diametris secentur, eædem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem secunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallela est, altera alteri *Conjugata* dicitur.

[a] ut A O similesque in I figura.
[b] ut A O similesque in II figura.
[c] ut P C, D B in utraque figura.

Corollarium 6.

Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam secari. Si enim fieri possit, secetur à diametro A O bifariam præter applicatas alia recta, ut Q R, Asymptotis occurrens in S & T; & sit per O ordinatim applicata B O D, Asymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam E O, F O [4], quàm T O, S O [5]. Quoniam verò, ductâ E V ipsi S F parallelâ [6], æqui-

[4] *per 2, & 5 Cor. 5. hujus.*
[5] *ex hypoth. juncto Cor. 5 hujus.*
[6] *per 15 & 29 Primi.*



æquiangula ſunt triangula E O V & F O S: erit [1] ut E O ad O V, ita F O ad O S. Quare cum E O ipſi F O ſit æqualis, erit & [2] O V ipſi O S, hoc eſt, rectæ O T æqualis, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ergo bifariam ſecatur recta R Q à diametro A O.

[1] per 4 ſexti. [2] per 14 quinti.

Corollarium 7.

Atque hinc manifeſtum fit, quòd, ſi vel in una eademque vel ad oppoſitas Hyperbolas binæ quælibet rectæ ſibi invicem æquidiſtantes ductæ ſint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum tranſeat ſeu diameter ſit: Quippe quæ per medium unius æquidiſtantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [3]. Unde apparet, quo pacto datæ Hyperbolæ vel oppoſitarum Hyperbolarum diametros quotlibet, ſimulque ordinatim applicatas ad eaſdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumve diametrorum communis interſectio eſt, reperire liceat.

[3] per 5 Corol. 5 hujus.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisa est.

Sit per punctum C in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta recta G C H, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam G H curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta G H Hyperbolam in C & I: eritque [1] I H rectæ C G, ideoque & ipsi C H æqualis. quod est absurdum. Non secat ergo G H Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porrò conversim, si G H in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in C H majori parte ipsa H I æqualis G C. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum I in Hyperbola, totaque C I [3] intra curvam cadet, ideoque ipsa G H Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo G C ipsi C H inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

[1] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[2] *per 4 Cor. 5 hujus.*
[3] *per 3 Cor. 5 hujus.*

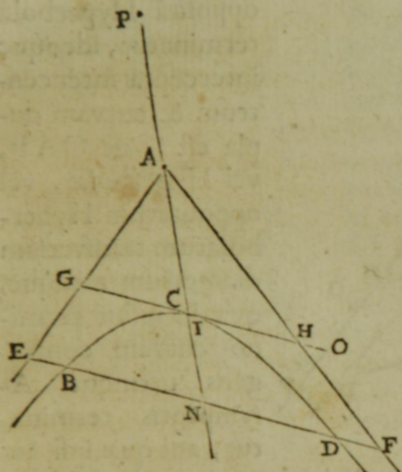
Corollarium 1.

Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti G C H æquidistans utcunque ducta sit B D, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum E B F sive [4] B F D, ut & F D E sive D E B æquale rectangulo G C H [5], id est, ipsius C H vel C G, dimidiæ tangentis quadrato.

[4] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[5] *per 5 hujus.*

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidistans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam secatur, id est, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, si ad diametrum A N ordinatim applicata sit B N D, quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta G C H, ipsi B N D æquidistans, cum æquales sint N F & N E [1]: erunt [2] quoque C H & C G æquales, ideoque [3] G C H Hyperbolam continget in C.



[1] *per 2 & 5 Corol. 5 hujus.*
[2] *per 9 quinti, & 4 sexti.*
[3] *per 6 hujus.*

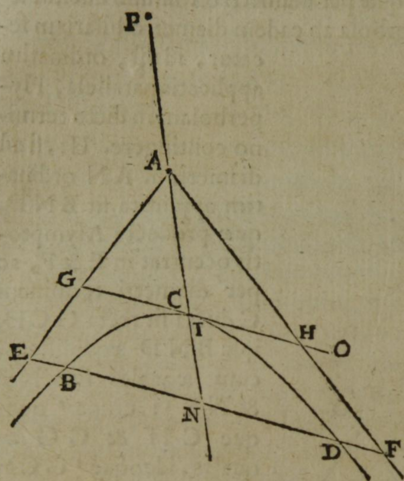
Corollarium 3.

Hinc liquet, non solùm omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam secari, ideoque ad eam ordinatim applicatas esse, sed & non posse plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, si contingenti G H parallela sit B D, Asymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro A C N, quæ ductæ B D occurrat in N: quoniam [4] G C, C H æquales sunt, nec non E N, N F [5], erunt quoque (demptis æqualibus [6] E B, D F,) B N, N D æquales, ideoque & ad dictam diametrum A C N ordinatim applicatæ. At verò non posse aliam rectam præter G H Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipsi æquidistantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ essent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur [7]. quod fieri non posse superiùs [8] ostensum est.

[4] *per 6 hujus.*
[5] *per 9 quinti & 4 sexti.*
[6] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[7] *per supra demonstrata.*
[8] *in Cor. 6 5 hujus.*

Cæ-

Cæterùm monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam, quæ à quocunque in Hyperbola puncto per centrum ducta oppositâ Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla est [1], ut CAP, vel Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum transversam diametrum; eamque, quæ in ipsius termino curvam contingens utrinque Asymptotis terminatur, aut quæ ipsi per centrum æqualis & parallela ducitur, ut GCH, secundam diametrum transversæ conjugatam; at verò illam, quæ ipsis PC, GH, transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis, ut CO, rectum latus sive Parametrum dici.



[1] per Corol. 1 5 hujus.

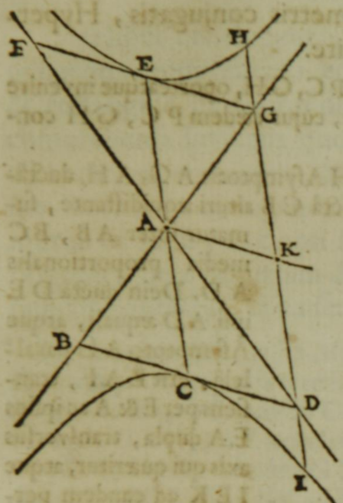
THEOREMA VII.

Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppositam Hyperbolam contingit, & quæ ad secundam diametrum, assumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum I C, H E, quarum Asymptoti B G, D F, diameter transversa utcunque assumpta C E, perque ejus terminum E ducta recta F E G parallela ipsi B D, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Asymptotis occurrant in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque F E G oppositam Hyperbolam contingere in E; & si per centrum A ducatur secunda diameter A K, diametro C E conjugata, ordinatim ad eandem A K applicatas ipsi C E diametro æquidistare.



Quoniam enim est [1] tam A E ad E G, ut A C ad C B, quàm A E ad E F, ut A C ad C D; & sunt tam A E, A C [2] quàm C B, C D [3] æquales, erit quoque [4] tam E G ipsi C B, quàm E F ipsi C D, ac proinde & E G ipsi E F æqualis. Unde [5] recta F G oppositam Hyperbolam H E continget in puncto E. Quod primo loco propositum fuit. Porrò si per G & D ducatur recta G D, secans secundam diametrum A K in K, oppositisque Hyperbolis occurrens in H & I, cum æquales & parallelæ sint E G, C D, erunt & [6] quæ ipsas conjungunt G D, C E parallelæ & æquales. Ideoque cum secunda diameter A K contingentibus B D, F G, id est [7], ordinatim ad diametrum C E applicatis æquidistans sit, utpote ex Hypothesi ipsi C E conjugata: erunt quoque [8] rectæ G K, E A, ut & K D, A C, ideoque & [9] G K, K D æquales. Quibus si addantur æquales [10] G H, D I: erunt similiter rectæ K H, K I sibi invicem æquales. Quocirca cum [11] ad secundam diametrum A K applicata sit recta H I, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ [12] eidem H I ac proinde & diametro C E æquidistabunt. Quod secundo loco propositum erat.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 1 Corol. 5 hujus.
[3] per 6 hujus.
[4] per 14 quinti.
[5] per 6 hujus.
[6] per 33 primi.
[7] per 3 Cor. 6 hujus.
[8] per 34 primi.
[9] per 1 Cor. 5 hujus.
[10] per 2 Cor. 5 hujus.
[11] per 6 Cor. 5 hujus.
[12] per 5 & 6 Cor. 5 hujus.

PROBLEMA I.

Propositio 8.

Datis quibuſcunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ P C, G H, oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eædem P C, G H conjugatæ diametri exiſtunt.

Ductis ab A centro per G & H Aſymptotis A G, A H, ductâque à C ad eorum alterutram rectâ C B alteri æquidiſtante, ſumatur inter A B, B C media proportionalis A D. Dein ductâ D E ipſi A D æquali, atque Aſymptoto A H parallelâ, erit E A F, tranſiens per E & A ac ipſius E A dupla, tranſverſus axis qui quæritur, atque I E K ad eandem perpendicularis, ac utrinque Aſymptotis terminata, axis ſecundus, priori conjugatus.

Quoniam enim punctum C [1] in Hyperbola eſt, rectangulumque A D E ipſi A B C æquale [2]; erit quoque punctum E [3] in Hyperbola. Porrò cum propter rectas D A, D E æquales [4] æqualis quoque ſit D A E angulus ipſi D E A, id eſt [5], E A K angulo, ſintque & anguli A E I, A E K ex conſtructione æquales: erunt [6] triangula A E I, A E K æquiangula, atque ob latus A E commune [7] etiam æqualia, latuſque I E lateri E K æquale. Unde cum punctum E [8] in Hyperbola exiſtat, dividatque bifariam rectam I K, utrinque Aſymptotis terminatam, continget ipſa I K [9] curvam in E; ideoque, & propter angulos F E I, F E K rectos, conjugati axes erunt F E, I K.

[1] *ex hypotheſi.*
[2] *per* 17 *ſexti.*
[3] *per* 3 *hujus.*
[4] *per* 5 *primi.*
[5] *per* 29 *primi.*
[6] *per* 32 *primi.*
[7] *per* 26 *primi.*
[8] *per ſup. demonſtr.*
[9] *per* 6 *hujus.*

THEO-

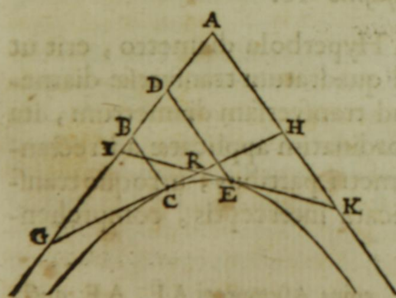
THEOREMA VIII.

Propositio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Aſymptotis comprehenſo æqualia abſcindunt triangula, & rectangula ſub eorundem triangulorum lateribus comprehenſa invicem quoque æqualia ſunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipſæque baſes ſeu contingentes Aſymptotis terminatæ, in mutuo occurſu, nec non ipſarum partes curvam contingentes inter occurſum & Aſymptotos interjectæ, in punctis contactus, in eadem ratione ſecantur.

Hyperbolam CE, cujus Aſymptoti AG, AK, rectæ GH, IK utrinque Aſymptotis terminatæ, ac ſibi mutuò in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula GAH, IAK æqualia eſſe; ac præterea eſſe GI ad IA, ſicut KH ad HA; itemque GR ad RH, ſicut KR ad RI; nec non GC ad CR, ſicut KE ad ER.

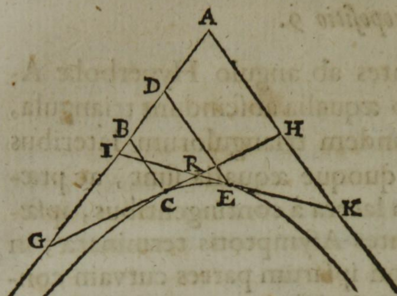
Ductis enim à punctis contactus C & E rectis CB, ED Aſymptotorum alterutri, ut AH, parallelis, cum ſit ut GC ad GH, ita GB ad GA, & BC ad AH [1]; ſitque GH ipſius GC dupla [2]: erit quoque tam GA ipſius GB quàm AH ipſius BC dupla, ideoque [3] rectangulum GAH rectanguli GBC ſive ABC quadruplum. Eodem modo rectangulum IAK rectanguli ADE quadruplum oſtendetur. Hinc cum æqualia ſint rectangula ABC, ADE [4], erunt quoque eorum quadrupla, nimirum rectangula GAH & IAK æqualia. Quod eſt primum.



Unde cum [5] ſit ut GA ad AK, ita IA ad AH, triangula quoque

[1] per 4 ſexti.
[2] per 6 hujus.
[3] per 20 ſexti.
[4] per 5 hujus.
[5] per 16 ſexti.

6 per 15 sexti. que G A H, I A K æqualia erunt [6], utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod est secundum.



7 per 16 quinti. 8 per 17 quinti. Ac cum permutando [7] quoque sit G A ad I A, ut A K ad A H: erit & [8] dividendo G I ad I A, ut K H ad H A. Quod est tertium.

Porrò cum ab æqualibus triangulis G A H, I A K ablato communi quadrilatero I R H A, residua, nempe triangu-
9 per 15 sexti. la G R I & K R H, quoque æqualia remaneant, erunt [9] eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id est, erit G R ad R H, ut K R ad R I. Quod est quartum.

10 per 18 quinti. Unde cum componendo [10] quoque sit G H ad R H, ut K I ad R I, aut, sumptis antecedentium dimidiis, C H ad H R, ut E I
11 per Coroll. 19 quinti. ad I R: erit & per conversionem rationis [11] C H sive G C ad C R, ut E I sive K E ad E R. Quod est quintum. Atque ita demonstrata sunt ea, quæ proponebantur.

THEOREMA IX.

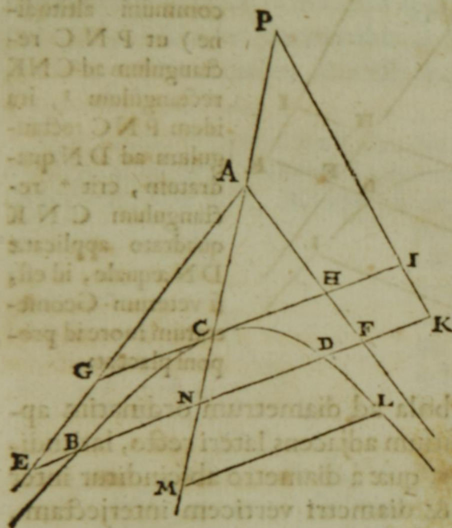
Propositio 10.

Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum secundæ ad quadratum transversæ diametri, sive ut parameter ad transversam diametrum, ita quadratum cujuslibet ordinatim applicatæ ad rectangulum sub ejusdem diametri partibus, utroque transversæ termino & applicatâ interceptis, comprehensum.

Sit in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta diameter utcunque P A C N, cujus secunda diameter transversæ P C conjugata sit G C H, parameter verò C I, ipsis nempe P C, G H tertia proportionalis, & sit ordinatim ad dictam diametrum appli-

applicata quælibet D N: dico esse ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est [1], ut recta I C ad rectam C P, ita quadratum D N ac P N C rectangulum.

Productâ enim applicatâ D N utrinque per Hyperbolam ad Asymptotos, ut E B N D F, cum sit [2] F N quadratum ad H C quadratum, id est [3], ad B F D rectangulum, ut N A quadratum ad C A quadratum: erit dividendo [4] D N quadratum ad H C quadratum, ut P N C rectangulum [5] ad C A quadratum, & permutando [6] D N quadratum ad P N C rectangulum, ut H C quadratum ad C A quadratum, sive [7] ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est, ut I C ad C P. Quod demonstrandum erat.



Corollarium 1.

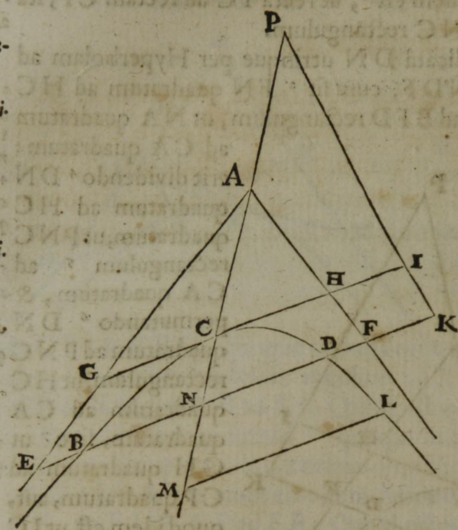
Hinc colligitur, quo pacto datæ cujuslibet Hyperbolæ, ut B C D, Asymptoti inveniantur. Quippe inventis [8] centro A, diametro quâcunque A N, quæ curvam secet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ B N; si, productâ N A ad P, ut A P ipsi A C sit æqualis, ductâque per C rectâ G C I applicatæ B N parallelâ, in eadem notentur puncta H & G, ita ut sit P N C rectangulum ad B N quadratum, sicut A C quadratum ad quadratum abs C G seu C H: erunt, quæ ex A centro per G & H ducuntur rectæ A G E & A H F, Asymptoti quæsitæ [9].

Corollarium 2.

Ex demonstratis patet, si per P & I transversæ diametri parametrique terminos ducatur recta P I K, occurrens cuilibet appli-

[1] *per Corol. 20 sexti.*
[2] *per 4, & 22 sexti.*
[3] *per 1 Corol. 6 hujus.*
[4] *per 6 secundi, & 17 quinti.*
[5] *per 6 secundi.*
[6] *per 16 quinti.*
[7] *per 15 quinti.*
[8] *per 7 Coroll. 5 hujus.*
[9] *per conversum 10 hujus.*

catæ, ut N D, productæ, si opùs fuerit, in K: rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale esse. Quoniam enim est [1] ut P C ad C I, sive ut P N ad N K [2], id est, (sumptâ N C communi altitudine) ut P N C rectangulum ad C N K rectangulum [3], ita idem P N C rectangulum ad D N quadratum, erit [4] rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale, id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat:



[1] per 10 hujus conv.
[2] per 4 sexti.
[3] per 1 sexti.
[4] per 9 quinti.

Quæ ab Hyperbola ad diametrum ordinatim applicatur, potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam, quæ à diametro abscinditur inter ipsam applicatam & diametri verticem interjectam, excedensque figurâ simili similiterque positâ ei, quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est ex demonstratis, in Hyperbola applicatarum quadrata ad se invicem esse, veluti rectangula sub interceptis diametri portionibus, ab utroque transversæ termino sumptis. ut, si applicatæ sint L M, D N, erit ut quadratum L M ad rectangulum P M C, ita quadratum D N ad rectangulum P N C: cum utriusque eadem sit ratio, quæ est parametri ad transversam diametrum [5], eritque propterea [6] permutatim L M quadratum ad D N quadratum, ut P M C rectangulum ad P N C rectangulum.

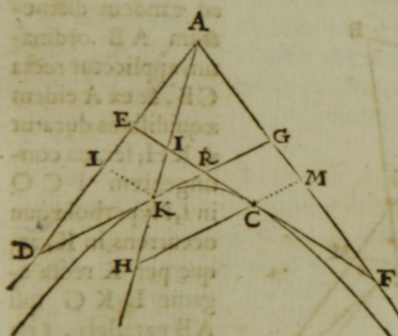
[5] per 10 hujus.
[6] per 16 quinti.

THEOREMA X.

Propositio 11.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abscissis æquale semidiametri transversæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Asymptoti A D, A F, contingat in puncto C utcunque sumpto recta E C F, Asymptotis occurrens in E & F, diametro autem A H utcunque ductæ in I; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata sit C H, quæ producta Asymptoto occurrat in M. Dico rectangulum H A I æquale fore quadrato semidiametri K A, sive, quod idem est [1], continuè proportionales esse H A, K A, & I A.



Ductis enim D K G applicatæ C H, & K L contingenti F E parallelis, notatoque intersectionis puncto R, cum sit [2] R C ad C F, ut R K ad K D, hoc est [3], M G ad M F, ut L E ad L D: erit quoque [4] M G ad G F, ut L E ad E D. Quare cum porrò [5] sit F G ad G A, ut D E ad E A: erit [6] ex æquo M G ad G A, id est [7], H K ad K A, ut L E ad E A, hoc est [8], ut K I ad I A: & [9] componendo H A ad K A, ut K A ad I A. Quod demonstrandum erat.

[1] *per 17 sexti.*
[2] *per 2 Cor. sexti, & 9 hujus.*
[3] *per 2 sexti.*
[4] *per compositionem rationis contrariam, vide Clavium ad 18 Quinti.* [5] *per 9 hujus.* [6] *per 22 Quinti.* [7] *per 2 sexti.* [8] *per 2 sexti.* [9] *per 18 Quinti.*

THEO-

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si quælibet contingens cuicunque ſecundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum ſub ſecundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abſciſſis, æquale ſemi-ſecundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Aſymptoti A D, A F, contingat in puncto C, utcunque ſumpto, recta F C Q, occurrens ſecundæ diametro A B, utcunque ductæ in Q: dico, ſi ex C ad eandem diametrum A B ordinatim applicetur recta C B, & ex A eidem æquidiſtans ducatur A K H, ſecans contingentem F C Q in I, Hyperbolæque occurrens in K, atque per K recta agatur D K G ipſi A B parallela, (ita ut [1] A K H diameter ſit ſecundæ diametro A B conjugata, ac ſemi-ſecundæ diametri magnitudine ſint K G, K D,) fore rectangulum B A Q æquale ipſius K G vel K D ſemi-ſecundæ diametri quadrato.

[1] *per 7 hujus.*

Ductâ enim per C rectâ T C M ſecundæ diametro A B parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum A K H ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque A H in H, Aſymptoto verò A F in M: Quoniam eſt [2] H A quadratum ad K A quadratum, ſive [3] H M quadratum ad K G quadratum

[2] *per 11 hujus, & Cor. 20 ſexti.*
[3] *per 4 & 22 ſexti.*

ſeu

ſeu [1] ad T M C rectangulum, ut H A ſeu C B ad I A, id eſt [2], ut B Q ad A Q; erit dividendo [3] H C quadratum ſeu B A quadratum ad K G quadratum, ut B A ad A Q. Ac propterea [4] B A, K G, & A Q proportionales erunt, rectangulumque B A Q [5] quadrato K G æquale. Quod demonſtrandum erat.

[1] per 1 Cor. 6 hujus.
[2] per 4 ſexti.
[3] per 17 Quinti.
[4] per Cor. 20 ſexti.
[5] per 17 ſexti.

Corollarium ad duas propoſitiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda ſit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipſa curva ſit, veluti K, inventis Aſymptotis [6], ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Aſymptoto parallelâ, ut K P, ac ſumptâ P G ipſi A P æquali, continget juncta G K D Hyperbolam in K [7]. quoniam uti G P ipſi P A, ita G K ipſi K D æqualis eſt [8].

Eodem modo, ſi datum punctum ſit in Aſymptotorum alterutra, veluti G, diviſâ A G bifariam in P, ductâque P K alteri Aſymptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat [9] in K: continget juncta G K D [10] Hyperbolam in puncto occurſus K.

Sit deinde datum punctum intra angulum Aſymptotis comprehenſum, veluti I: ductâ à centro [11] per I diametro, ut A I H, quæ curvæ occurrat in K, ſumptâque A H ipſis A I, A K tertiâ proportionali, ſi per H agatur ordinatim applicata H C (nimirum, quæ contingenti in K æquidiſtet [12]), occurrens curvæ in C, continget juncta I C [13] Hyperbolam in eodem C puncto.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui deinceps ſunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q & centrum A ſecundâ diametro Q A B, tranſverſâque ipſi conjugatâ A K H (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyperbola ductam ipſi Q A B æquidiſtantem bifariam dividat), nec non tangente K G vel K D, Aſymptoto terminatâ; ſi fiat quadrato K G vel K D æquale rectangulum Q A B, ac per B ad ſecundam diametrum A H applicetur recta B C, nempe ipſi A K æquidiſtans [14], quæ curvæ occurrat in C: juncta Q C [15] in eodem puncto C Hyperbolam continget.

Manifeſtum porrò eſt, ſi datum punctum vel intra Hyperbolam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam continet: fieri non poſſe [16], ut ab eodem puncto ducatur recta, quæ producta eandem non ſecet.

[6] per 1 Cor. 10 hujus.
[7] per 6 hujus.
[8] per 2 ſexti.
[9] per 2 Cor. 3 hujus.
[10] per 2 ſexti, & 6 hujus.
[11] invento per 7 Corol. 5 hujus.
[12] per 3 Cor. 6 hujus.
[13] per 11 hujus.
[14] per 7 hujus.
[15] per 12 hujus.
[16] juxta 1 Cor. 3 hujus.

CAPUT III.

DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, sive id rectum angulum subtendat, sive acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen sive ab altera sive ab utraque parte, prout opùs fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quàm per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continuetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* simpliciter vocabitur.

III.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quàm ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicetur.

IV.

Cum de *angulo* simpliciter sermo erit, eum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

VI.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, si opùs fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* sumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

VII.

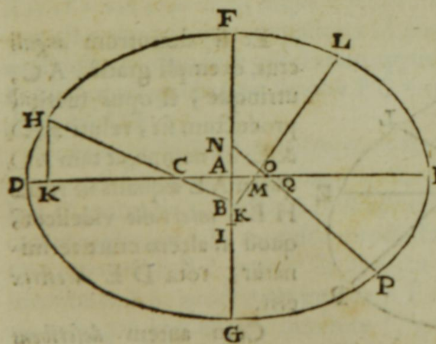
Describentem in statione prima dicemus, cùm ea ad *directricem* est perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum esto, ac cùm de iis simpliciter sermo erit in ea statione considerabuntur.

VIII.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

Ut si trianguli rectanguli A B C latus B C moveatur in *angulo* B A C, ex. gr., ut terminus C tendat ad A, simulque B vel retrocedat vel promoveatur versùs I; ita tamen, ut iidem termini B & C semper sint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio juncti fuêre, nempe B in latere A B, ac C in latere A C, productis ubi opùs fuerit; eodemque illo motu quolibet sui puncto. ex. gr., H, assumpto, prout placuerit, sive in ipsa B C, sive in eadem producta, (ut à nobis plerumque assumetur, cum id naturæ quodammodo convenientiùs videatur,) describat curvam lineam: nempe, ut, ubi punctum C pervenerit ad A, ac punctum B ad I, simulque H processerit ad F, descripta sit per motum puncti H cur-

Fig. 1.



H curvæ portio HF: deinde puncto C promoto per A ad M, ſimulque termino B retrogreſſo vel progreſſo ab I ad K, ita ut H pervenerit ad L, deſcriptus ſit arcus FL: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, ſimulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E inciderit, deſcriptus ſit arcus LE: ac rurſus ubi punctum B per A progreſſum fuerit ad N, ſimulque punctum C ex Q vel retroceſſerit vel progreſſum ſit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, deſcriptus ſit arcus EP: atque ſi porrò eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D tranſierit rurſuſque ad H pervenerit, deſcripta ſit tota curva HFLEPGD: erunt

Fig. II.

BC, quæ & in aliis ſtationibus eſt IA, KM, AQ, NO, &c. *linea deſcribens.*

H *punctum efficiens.*

HC & HB utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.

Et ſi alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, AC, utrinque, ſi opùs fuerit, productum ſit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam AD quàm AE æqualis ſit rectæ HB, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota DE *directrix* erit.

Cum autem *deſcribens* BC eidem *directrici* DE eſt perpendicularis, quod quidem fit, quando ipſa poſitione eadem eſt cum crure AB, uti AI, *angulo* nempe exiſtente recto, ut in

ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione B C, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit I A, casu primo, & B C, casu altero, *describens in statione prima* seu *describens* simpliciter, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, *punctum efficiens in statione prima* seu *punctum* simpliciter.

Ac proinde F A G [a] vel H A G [b], nempe ab eodem *puncto* per *centrum* A ducta atque ipsius F A sive H A dupla, *secantem* repræsentat.

[a] in casu fig. I & similib
[b] in casu fig. II & III ac similib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

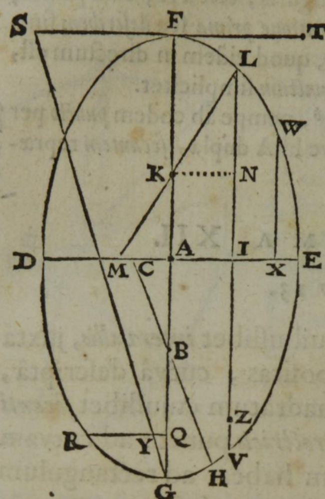
In quocunque *angulo*, & quibuslibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* æquidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatæ, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

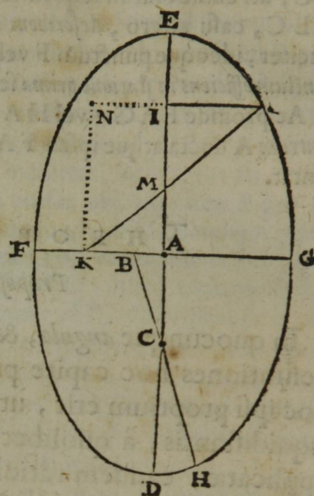
Sit in quocunque *angulo* B A C, *intervallis* quibuslibet H C, H B, descripta curva D H E G, cujus *directrix* D A E, *secans* F A G [a] vel H A G [b]; atque à puncto I in *directrice* D E utcunque assumpto, ad curvam applicata I L *secanti* F A G [a] vel H A G [b] æquidistans: dico fore quadratum applicatæ L I ad rectangulum D I E, ut est quadratum *Secantis* F G [a] vel H G [b] ad quadratum *directricis* D E.

[a] in casib. fig. I, II, & similibus.
[b] in casib. cæterarum fig. & similibus.

Sit enim recta K M *describens* in ea statione, uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* B A C rectus sit [a], ductâ K N *directrici* D E parallelâ, quæ occurrat applicatæ L I, aut eidem productæ, si opùs fuerit, in N: cum *intervallum* K L æquale sit dimidiæ *directrici* A E vel A D, ideoque & K L quadratum æquale A E vel A D quadrato, ablatis utrinque æqualibus, nimirum [1], quadrato K N ab una, & quadrato A I ab altera parte, residua quoque, nempe L N quadratum & D I E rectangulum [2], æqualia erunt. Unde cum [3] sit ut L I quadratum ad L N quadratum, id est [4], ad D I E rectangulum,

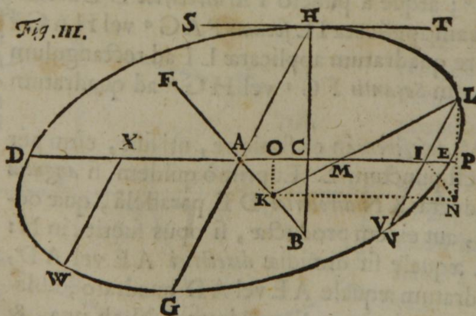
[1] *per 34 primi.*
[2] *per 47 primi, & 5 secundi.*
[3] *per 4 & 22 sexti.*
[4] *per supra demonstr.*





gulum, ita LM quadratum ad LK quadratum, hoc eſt, ita FA quadratum ad AE quadratum, ſive [1] ut FG quadratum ad DE quadratum, conſtat priori caſu propoſitum.

[1] *per 15 quinti.*



Non ſit deinde *angulus* BAC rectus [b], ducanturq́ue ad *directricem*, eamvè productam, ſi opùs fuerit, rectæ KO, LP *deſcribenti* BC parallelæ, ideoq́ue ad *directricem* DE perpendiculares, ut & IN lateri AB parallela, quæ ipſi LP, eidemvè productæ, ſi opùs fuerit, occurrat in N; ita ut [2] ſimilia ſint triangula AHC & ILP, itemq́ue

[2] *per 29 primi.*

Fig. IV.

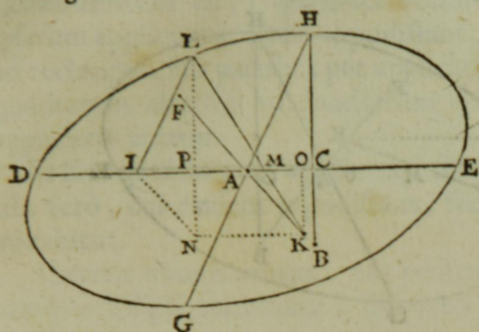


Fig. V.

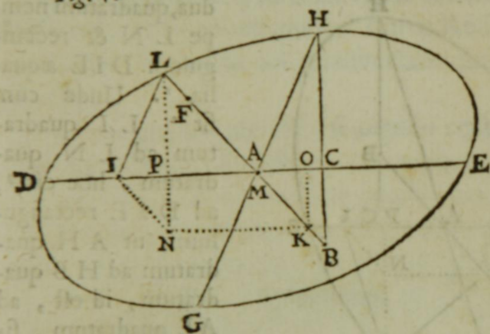
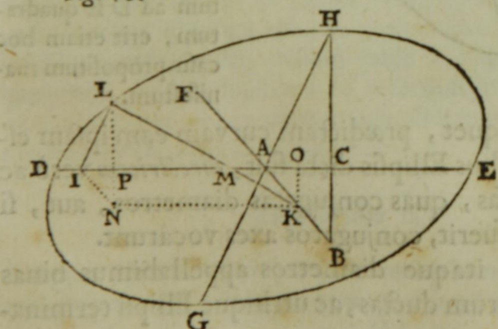


Fig. VI.



que AHB & ILN, ac denique jungatur KN. Quoniam itaque eſt [1], ut BA ad KA, ſive ut BC, id eſt, MK, ad KO, ita ML, hoc eſt, HC, ad LP; ut autem HC ad LP, ita HA ad LI, & ita BA ad NI, ac per conſequens BA ad KA, ut eadem BA ad NI: erit [2] KA ipſi NI æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypotheſi. Quare & AI, KN æquales & parallelæ erunt [3]. Porrò cum æquales ſint rectæ KL & AE vel AD, ideóque & ipſarum quadrata, hinc ſubductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum KN ab una, ac quadrato AI ab altera parte, erunt

[1] per 4 ſexti.
[2] per 9 quinti.
[3] per 33 primi.

Fig. VII.

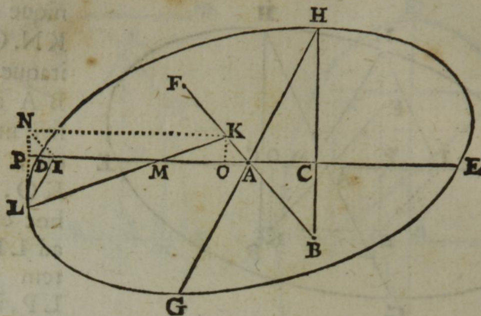
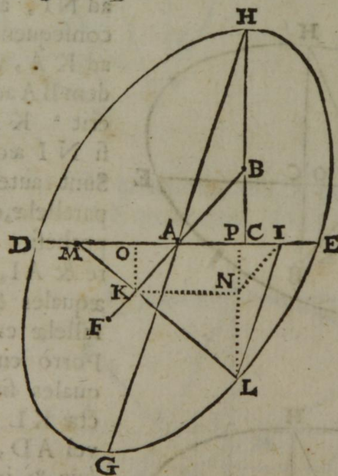


Fig. VIII.



erunt quoque residua, quadratum nempe L N & rectangulum D I E æqualia [1]. Unde cum sit [2] L I quadratum ad L N quadratum, hoc est [3], ad D I E rectangulum, ut A H quadratum ad H B quadratum, id est, ad A E quadratum, sive [4] ut H G quadratum ad D E quadratum, erit etiam hoc casu propositum manifestum.

[1] per 47 primi, & 5 secundi.
[2] per 4 & 22 sexti.
[3] per supra demonstr.
[4] per 15 quinti.

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse, quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac *secantem* eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi terminatas;

tas; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonstratum est,) quadrata rectarum quæ alteri ipsarum applicantur alteri æquidistant, ita se habeant ad rectangula sub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejusdem quæ per applicatas secatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ insistunt, transversa; illa verò, cui eædem æquidistant, secunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipsi terminatæ, diametri simpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ transversæ secundæque diametro tertia est proportionalis, Latus Rectum sive Parametrum vocabimus ad transversam diametrum pertinentem.

Notandum tamen est, si *angulus* rectus sit, ac *punctum* ab utroque *describentis* termino æqualiter distet, curvam, quæ motu ejusdem *puncti*, uti prædictum est, describitur, circumferentiam Circuli esse.

Corollarium 1.

Ex ipsa demonstratione & collatione figuræ primæ cum secunda manifestum est: in Ellipsi, conjugatorum axium transversum etiam secundum esse, & contra. Sive enim L I vel huic vel illi axi applicata sit, eodem modo semper probabitur esse quadratum ejusdem applicatæ ad rectangulum sub partibus axis cui applicatio fit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam secatur.

Corollarium 2.

Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc est, eam, quæ per terminum secundæ diametri trans-

versæ æquidistans ducitur, Ellipsin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minus eandem seca-

Fig. I.

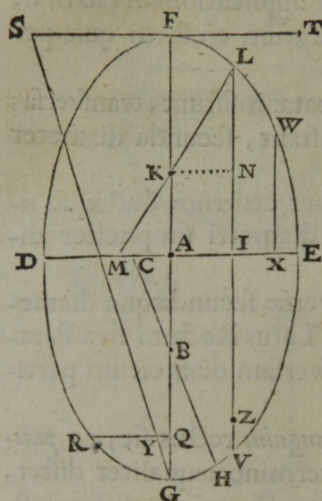
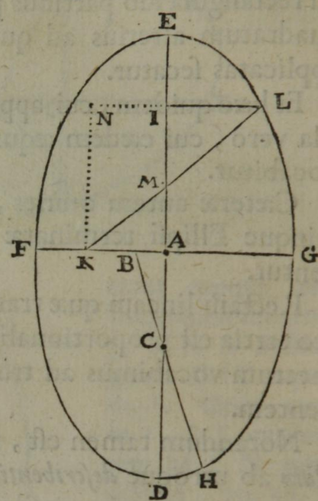


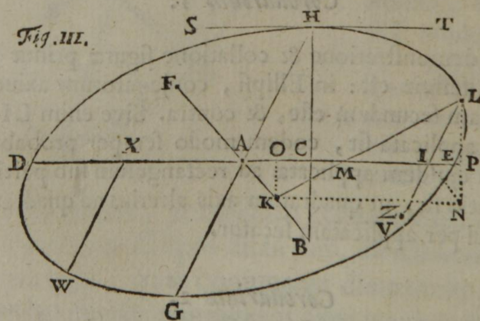
Fig. II.



re. Si enim per F [a] aut H [b] terminum secundæ diametri G F [a] vel G H [b] ductâ rectâ S T, transversæ diametro D E paralle-

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. III & similib.

Fig. III.



lâ, assumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L, quod descriptum sit *describente* in statione K M, ducaturque

L I

LI[a] vel LP[b] ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut in triangulo MLI[a] vel MLP[b] recta ML, id est, perpendicularis FA[a] vel HC[b], major sit[1] quàm LI[a] vel LP[b]; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque assumptum est, id est, tota Ellipsis, præter F[a] aut H[b] punctum, infra ductam ST, seu versùs Ellipseos centrum, cadat.

a in casu fig. I & similib.
b in casu fig. III & similib.
1 per 18 primi.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint LI, WX, erit quadratum WX ad rectangulum DXE, ut quadratum LI ad rectangulum DIE: cum[2] utriusque ratio sit eadem quæ quadrati FG[a] vel HG[b] ad quadratum DE, sive quæ parametri ad transversam diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

2 per 13 hujus.

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata LI producta Ellipsi occurrat in V, quoniam est[3] quadratum LI ad rectangulum DIE, ut quadratum VI ad idem DIE rectangulum, erit[4] quadratum LI æquale quadrato VI, ideoque & ipsa recta LI ipsi rectæ VI æqualis.

3 per Cor. præced.
4 per 9 Quinti.

Corollarium 5.

Constat porrò, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio sui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipsi esset, rectæ IL & IZ[5], ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

5 per Cor. præcedens.

Corollarium 6.

Ex dictis porrò colligitur, si ab extremitate transversæ diametri,

[a] in casu fig. I & similib.

metri, ut puta FG[a], eductâ parametro FS secundæ diametro DE parallelâ, jungatur SG, atque ad eandem diametrum recta

Fig. I.

quælibet ordinatim applicetur, ut RQ, quæ secet junctam SG in Y: fore rectangulum FQY quadrato applicatæ RQ æquale.

Fig. III.

[1] *per* 13 *hujus.*
[2] *per Cor.* 20 *sexti.*
[3] *per* 1 *sexti.*

Quoniam enim est [1] GF quadratum ad DE quadratum, id est [2], GF ad FS, sive GQ ad QY, hoc est [3], GQF rectangulum ad

YQF

Y Q F rectangulum, ut [1] idem G Q F rectangulum ad R Q quadratum, æqualia erunt [2] Y Q F rectangulum & R Q quadratum: id eſt, ſi veterum Geometrarum more id proponi placeat. [1] *per 13 hujus.* [2] *per 9 quinti.*

Quæ ab Ellipſi ad diametrum applicatur poteſt ſpatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam quæ à diametro inter ipſam applicatam & diametri verticem abſcinditur, deficienſque figurâ ſimili ſimiliterque poſitâ ei quæ lateribus tranſverſo rectoque continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuſlibet diametris conjugatis, Ellipſis in plano deſcribatur.

Ut ſi conjugatis axibus D A E & F A G [a] Ellipſis ſit deſcribenda, *deſcribente* B C, quæ ſemi-axium A D, A F differentia ſit, *intervallis* verò H C, H B, ipſis A F, A D utroque utrique æqualibus, in *angulo* D A G, curva deſcribatur, eritque hæc ipſa Ellipſis quæſita. [a] in caſu fig. I & ſimilib.

At ſi aliis quibuſlibet conjugatis diametris, obliquè ſeſe interſecantibus, ut D E, H G [b], Ellipſis ſit deſcribenda: demiſsâ à termino unius ad alteram perpendiculari, ut H C, ſumptâque in eadem ſeu in ipſa producta, ſi opùs fuerit, rectâ H B ipſi D A vel A E æquali, & per B & A ductâ rectâ B A F, ſi *deſcribente* B C, *intervallis* verò H C, H B, in *angulo* B A C Ellipſis deſcribatur, erit hæc ea ipſa quæ quæritur. [b] in caſu fig. III & ſimilib.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipſam applicatæ, conjugatæ quoque diametri datæ ſint: ſimul quoque innoteſcit, quo pacto & illis datis Ellipſis deſcribatur.

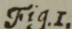
Theorema XIII.

Propoſitio 14.

In Ellipſi circà quoſcunque axes deſcriptâ, ducta quælibet diameter tranſverſa eſt, habetque ſecundam ſibi conjugatam.

Sit in Ellipſi S Y X Z, cujus centrum A, axes verò S X, Y Z, ducta quælibet diameter DAE; & ſic deſcribens O W in ea ſtatione, uti fuit cùm deſcriptum eſt punctum D vel E, ita ut intervalla ſint D W, D O. Deinde applicatâ eâdem deſcribente in ſtatione reciproca, hoc eſt, in alterutro angulorum qui ipſi W A O deinceps ſunt, veluti P R, ita ut rectæ A R, A P ipſis A W, A O reciprocè ſint æquales, nimirum A R ipſi A O, & A P ipſi A W, ac proinde triangulum W A O [1] ſimile & æquale triangulo P A R, ab Ellipſeos puncto H, quod deſcribenti P R in directum eſt, ducta ſit diameter altera H A G. Dico diametrum D E transverſam eſſe, H G autem ſecundam ipſi D E conjugatam: id eſt, ſi, ductâ H C ad D E perpendiculari, in eadem H C, produ-

[1] *per 4 primi.*



ctâ, ſi opùs fuerit, ſumatur H B ipſi D A æqualis; ductâque per B & A rectâ B A F, in angulo B A C, intervallis verò H C, H B, Ellipſis deſcribatur, cujus utique conjugatæ diametri ſunt in D E, & H G [2]: dico illam cum expoſita Ellipſi omnino eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat.

[2] *per 13 hujus ejuſque Corol. 7.*

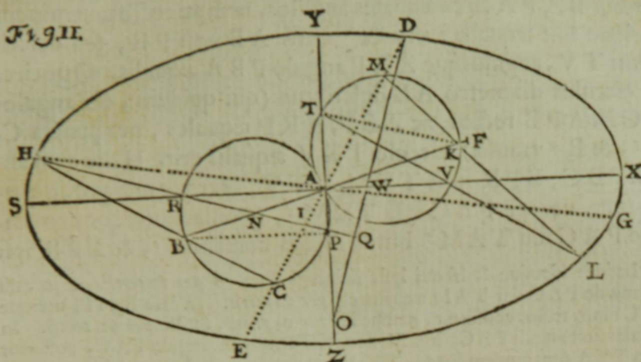
Aſſumpto enim in expoſita Ellipſi alio quopiam puncto L, quod quidem deſcriptum ſit deſcribente in ſtatione T V, diametro T V circulus deſcribatur, qui, propter angulum T A V rectum [a], neceſſariò quoque per A tranſibit [3], lineaſque B A F & D A E

[a] aut certè, quia punctorum T & V alterutrum cum puncto A coïncidit, uti eſt caſus in fig. V I.

[3] *per converſam 31 tertii.*

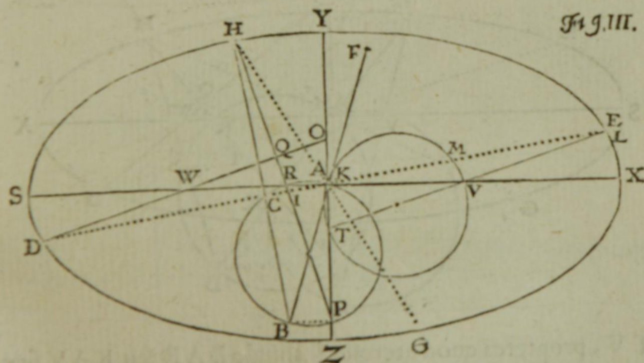
DAE alibi etiam secabit [b], uti in K & M. Deinde junctâ KM, eaque productâ versùs L, agantur TK, PB.

[b] aut illarum alteram continget, alteram verò secabit, ut in casib. fig. III & IV.



Cum igitur ipsarum DO, HP, productarum, si opùs fuerit, intersectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob similitudinem trianguli OQP cum utroque triangulorum OAW, RAP [c], notato ipsarum DE, PH intersectionis puncto I, erunt triangula

[c] vel, si puncta O & P coïncidant, ob angulos AOW, APR semirectos.



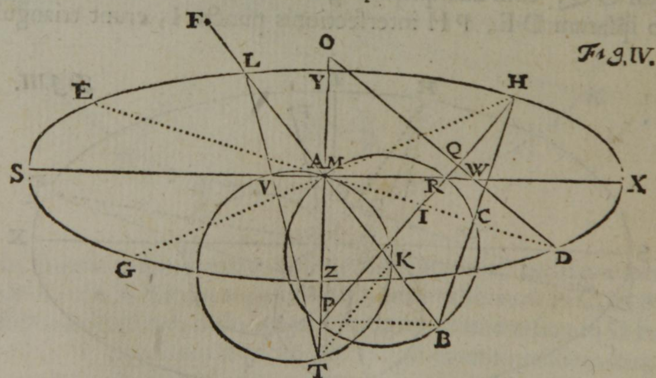
IQD, ICH æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula ODA, PHB latera OD, DA lateribus PH, HB, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant: erit & [i] basis OA

[i] per 4 primi.

O A, ſive recta A R, baſi P B, angulusque D O A, id eſt P R A, angulo H P B æqualis; ac propterea [1] recta P B ipſi R A parallela. Hinc cum triangulorum R A P & B P A latera R A, A P lateribus B P, P A circa æquales angulos, nempe rectos, utrumque utrique ſint æqualia: erit & [2] baſis A B baſi P R, ſeu deſcribenti T V, angulusque A R P angulo P B A æqualis. Quocirca & circulus diametro A B deſcriptus (qui quidem, ob angulos A C B, A P B rectos, ac A B P, A R P æquales, per puncta C, P [3], & R [4] tranſit) circulo T K V æqualis erit. Unde cum anguli P B C, B P R ipſis T K M, K T V, uterque utrique, æquales ſint, nempe P B C ipſi T K M [d], quoniam uterque cum angulo P A C ſeu T A M [5] binos rectos conſtituit [e], & B P R ipſi

[1] *per 27 primi.*
[2] *per 4 primi.*
[3] *per converſam 31 tertii.*
[4] *per converſam 21 tertii.*

[d] pro caſu fig. II adde: ideoque & hi qui ipſis deinceps ſunt. [5] *per 22 tertii.* [e] in caſu fig. II uterque angulo P A C ſeu T A M æqualis eſt *per 20 tertii.* In caſu fig. III uterque cum angulo P A C binos rectos conſtituit, nempe hic *per 13 primi*, & ille *per 22 tertii.* In caſu fig. IV æquales ſunt anguli P B C, T K M, quoniam prior cum angulo P A C, poſterior verò cum angulo T V A (qui quidem P A C, T V A æquales ſunt *per 32 tertii*) binos rectos conſtituit *per 22 tertii.* In caſu fig. V. T K M ſive T A M æqualis eſt angulo P B C, quia uterque cum angulo P A C duos rectos conſtituit *per 13 primi & 20 ac 22 tertii.* In caſu fig. VI æquales ſunt anguli P B C, T K M, quoniam angulus P A C æqualis eſt ei, qui in ſegmento A V M conſtitueretur *per 32 tertii*, quorum quidem prior cum angulo P B C, poſterior verò cum angulo T K M binos rectos conſtituit *per 22 tertii.*



K T V, propterea quòd uterque [6] angulo B A R ſeu K A V ſive F A V æqualis eſt [f]; ſintque porrò, ob æquales angulos P A B, T A K [7], tam peripheriæ P B, T K, quàm earum ſubtenſæ, nempe

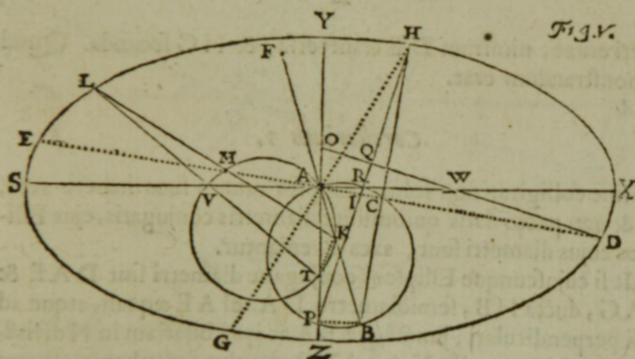
[6] *per 20 tertii*, atque in caſu fig. III per eandem & *32 tertii.*

[f] In caſibus fig. IV & V tam angulus B P R ſeu B A R, quàm angulus K T V cum angulo K A V duos rectos conſtituit *per 13 primi, & 22 tertii.* [7] *per 26 & 29 tertii.*

pe latera P B, T K dictis æqualibus angulis adjacentia inter se æqualia g: apparet sicuti rectæ B C, P R productæ concurrunt in H, ita quoque rectas K M, T V productas, & quidem, cum ipsi P H æqualis sit T L, in ipso puncto L concursuras. quippe ex antedictis [1] similia atque in totum æqualia sunt triangula B P H, K T L, adeoque & latus K L lateri B H æquale. Est autem [2] & subtensa K M subtensæ B C æqualis h, ob æquales an-

g In casu fig. III, ubi recta B A F tangit circulum T K V, æqualia sunt latera B P, T K ob angulos B A P, T V K æquales *per 32 tertii.* In casu fig. VI, ubi recta P A Y contingit circulum T K V, æquales sunt subtensæ B P, T K ob angulos P A B, T M K æquales *per 32 tertii.*

[1] *per 26 primi.* [2] *per 26 & 29 tertii.* h In casu fig. III K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus qui consisteret in segmento K T M æqualis foret angulo F A M seu B A C *per 32 tertii.* In casu fig. IV K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus K T M æqualis est angulo K A C seu B A C *per 32 tertii.* In casu fig. V K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus in segmento B C æqualis foret angulo K A M, utpote cum tam hic quàm ille cum angulo C A B duos rectos constitueret *per 13 primi & 22 tertii.*

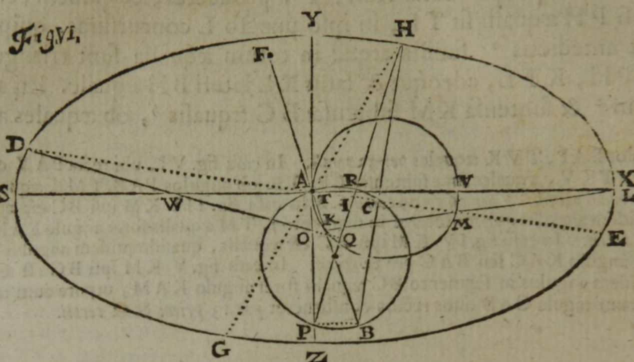


gulos K A M, B A C. Quocirca & L M ipsi H C æqualis erit. Unde cum describens sit K M, utpote ipsi B C æqualis, ac constituta in angulo K A M (qui cum ipso B A C vel idem i, vel ei ad verticem k, vel denique ipsi deinceps est l) aut certè cum alterutro crurum coïncidens m, atque ex demonstratis æqualia quoque sint intervalla H B, H C intervallis L K, L M: sequitur punctum L, in exposita Ellipsi utcunque sumptum, id est, totam Ellipsin S Y X Z, esse in Ellipsi, quæ in angulo B A C, intervallis H B, H C, describitur, ideoque alteram alteri per

i ut in casu fig. VI.
k ut in casibus fig. I, & II.
l in casu fig. V.
m ut in casibus fig. III & IV.

[1] per 13 hujus, ejusque Cor. 7.

omnia congruere. Sunt autem [1] hujus conjugatæ diametri D E, H G. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem est, conjugatæ dia-



metri erunt, nimirum D E transversa, & H G secunda. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 1.

Hinc colligitur non solùm Ellipses omnes suos habere axes, sed & quo pacto datis quibuslibet diametris conjugatis, ejus Ellipseos cujus diametri sunt, axes inveniantur.

Ut si cujuscunque Ellipseos conjugatæ diametri sint D A E & H A G, ductâ H B, semidiametro D A vel A E æquali, atque ad D E perpendiculari, junctâque B A ac ipsâ bifariam in N divisâ, si centro N intervallo N A vel N B circulus describatur, secans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ H P, H R semi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum positæ, sicut totæ S X & Y Z, exhibebunt magnitudine ac positione quæsitos axes ejusdem Ellipseos, cujus D A E & H A G conjugatæ diametri existunt.

[2] per 4 primi.

Ductâ enim P B, sumptâque A O ipsi A R, ideoque [2] & ductæ P B æquali, agatur D O, occurrens ipsi S X in W. Cum itaque ob angulum A C B rectum descriptus circulus etiam per C transeat [3], erunt anguli P B H & O A D æquales, quoniam uter-

[3] per 31 tertii.

que

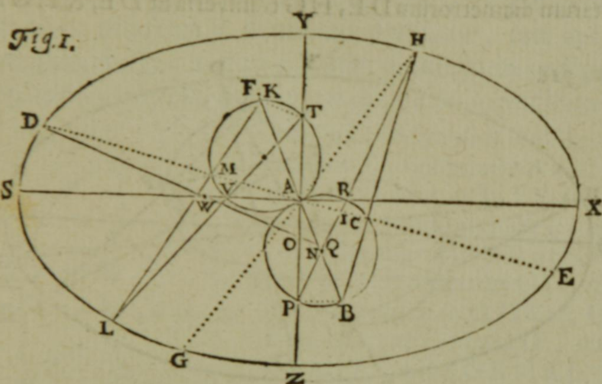
que cum angulo [a] PAC ſeu PBC duos rectos conſtituit [1]. Unde cum triangula OAD, PBH latera OA, AD lateribus PB, BH, utrumque utrique, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque [2] baſis OD baſi PH, id eſt, rectæ SA vel AX, ut & angulus AOD angulo BPH ſeu [3] PRA æqualis. Hinc cum æqualia ſint triangula RAP, OAW, propter angulos ad R & O æquales, atque [4] RAP, OAW rectos, nec non latera RA & OA æqualia: erit etiam [5] latus AW lateri AP, ut & latus OW ipſi PR æquale. Quocirca cum [6] *deſcribentes* ſint

[a] nimirum *cum angulo* PAC in caſu fig. I & ſimilibus, & *cum angulo* PAC *ſeu* PBC, in caſu fig. II & ſimilibus.

[1] *per 13 primi & 22 tertii.*

[2] *per 4 primi.* [3] *per 29 primi.* [4] *per 31 tertii & 13 primi.* [5] *per 26 primi.* [6] *per 13 hujus.*

Fig. I.



OW, PR ejus Ellipſeos, cujus axes ſunt SX, YZ, & quidem in ſtatione reciproca conſtitutæ, *punctaque efficientia* D & H: manifeſtum eſt ex ſuperiori demonſtratione, Ellipſin, quæ axibus SX, YZ deſcribitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ ſunt DE & HG, omnino eandem eſſe:

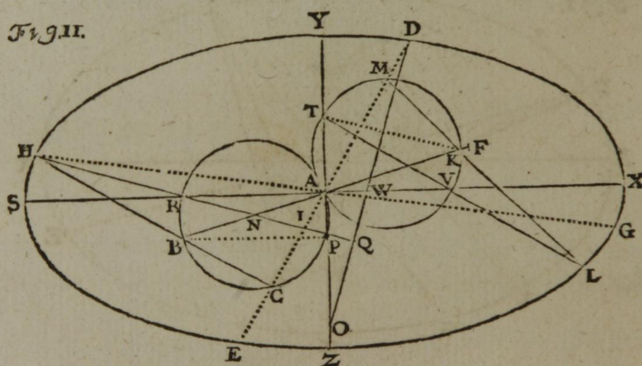
Atque ita, quæ de Ellipſi, circa quoſcunque axes deſcripta, ſuperiori Theoremate propoſita ac demonſtrata ſunt, etiam cuilibet Ellipſi, & circa quaſcunque diametros conjugatas deſcriptæ, convenire, manifeſtum eſt.

Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonſtratione ejuſdem Theorematis, in Ellipſi diametros omnes à centro bifariam ſecari. demonſtratum enim eſt, in diametro D E, utcunque ductâ, partem A E parti D A æqualem eſſe, cum utraque *intervallo* H B æqualis ſit.

Corollarium 3.

Patet inſuper in Ellipſi, quarumcunque diametrorum conjugatarum tranſverſam etiam ſecundam eſſe, & contra. Ut, ſi conjugatarum diametrorum D E, H G tranſverſa ſit D E, & H G ſe-



[1] *per* 14 *hujus ejuſque Corol.* 1.

cunda; cum in Ellipſi ducta quælibet diameter [1] tranſverſa ſit, habeatque ſecundam ſibi conjugatam, erit quoque H G tranſverſa. At verò & D E ſecundam eſſe ipſi H G conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II tranſpoſitis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonſtratum ſimul apparebit.

Corollarium 4.

[2] *per* 2 *Cor.* 13, & 3 *Cor.* 14 *hujus.*

Quare & quæ per terminum tranſverſæ diametri ſecundæ æquidiſtans ſeu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipſin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipſin cadit [2].

Co-

Corollarium 5.

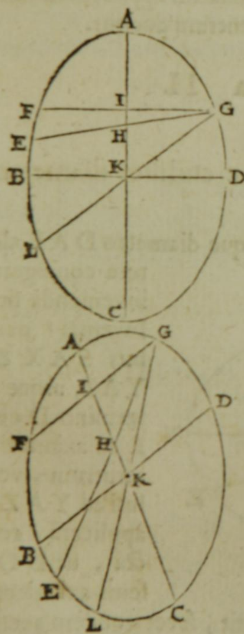
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipseos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipsin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipsin cadere [1], nec eidem in pluribus quàm duobus punctis occurrere [2] possit.

[1] *per Cor. præcedens.*
[2] *per 5 Cor. 13 hujus.*

THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Quæ bina quælibet Ellipseos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc est, conjugatæ diametro æquidistans.



Si enim in Ellipsi A B C D, cujus centrum K, à diametro A K C bifariam divideretur recta E H G, quæ neque per centrum transeat, neque conjugatæ diametro B D æquidistans sit; applicatâ ordinatim G I F, ductâque per centrum rectâ G K L: Quoniam esset, ut G H ad H E, ita tam G I ad I F [3], quàm G K ad K L [4], recta per F & E, nec non per E & L ducta foret una linea recta diametroque A C parallela [5]; ideoque ad alteram ipsi conjugatam, nempe ad B D, ordinatim applicata [6], atque Ellipsi in tribus punctis occurreret; quod fieri non posse supra [7] ostensum est.

[3] *per 4 Cor. 13 hujus.*
[4] *per 2 Cor. 14 hujus.*
[5] *per 2 sexti.*
[6] *per 13 & 3 Cor. 14 hujus.*
[7] *in 5to Coroll. 13 hujus.*

Corollarium 1.

Ideoque si diameter rectam quamlibet in Ellipsi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit [8].

[8] *per 4 Cor. 13, & 15tam hujus.*

Corollarium 2.

Quocirca si in Ellipsi binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividet recta linea per illius centrum transibit, seu ejusdem diameter existet. Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipseos diametros quotlibet, simulque ad easdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriumvè diametrorum communis intersectio est, ideoque & diametros conjugatas, axesque [2] invenire liceat.

[1] *per 1 Cor. 15 hujus.*

[2] *per 1 Cor. 14 hujus, aliterve, ut cuilibet obvium est.*

Corollarium 3.

Ex dictis facilè apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcunque Ellipseos puncta conjungit, totam intra Ellipsin cadere [3]: utpote cum ipsa [4] vel diameter sit, vel ordinatim applicata ad eam diametrum, quæ per ipsius medium & centrum ducitur.

[3] *per 5 Cor. 14 hujus.*

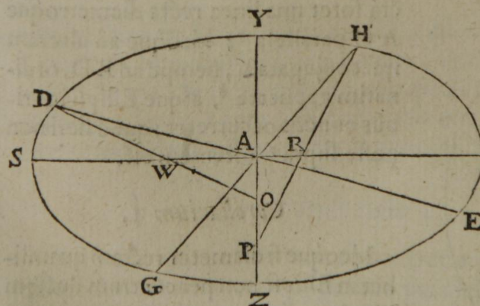
[4] *per 15 hujus ejusque Cor. 1.*

PROBLEMA II.

Propositio 16.

In data quacunque Ellipsi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipsi SYXZ ductæ utcunque diametro DAE altera conjugata invenienda sit. Inventis [5] axibus SAX & YAZ, atque à termino D vel E ad axium alterutrum, veluti ad YAZ, applicatâ rectâ, ut DO, semi-axi alteri SA æquali, quæ producta, si opùs fuerit, secet eundem axem alte-



[5] *per 2 Cor. 15 hujus.*

alterum, uti in W, applicetur in ſtatione reciproca ipſi O W, eidem æqualis recta P R, nempe ut A P, A R ipſis A W, A O ſingulæ ſingulis æquales ſint, ac producta P R Ellipſi occurrat in puncto H, à quo ſi per centrum A ducatur recta H A G, Ellipſi terminata: conſtat, per ea, quæ ad Propoſitionem 14tam hujus libri demonſtrata ſunt, eandem H A G eſſe diametrum ipſi D E conjugatam.

Atque ita ſimul apparet, ſingulis diametris ſuas quoque diſtinctas conjugatas diametros eſſe, eidemque diametro unam tantùm conjugatam duci poſſe.

Corollarium.

Unde porrò perſpicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipſi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipſi conjugatâ [1], per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidiſtans: erit eadem recta [2] contingens quæſita.

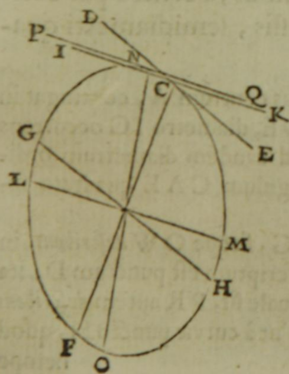
[1] per 16 hujus.

[2] per 4 Cor. 14 hujus.

THEOREMA XV.

Propoſitio 17.

Ellipſin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela eſt diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipſin C H F G in puncto C recta D C E, parallela diametro G H, quæ conjugata ſit diametro C F, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipſin non contingere.

Si enim fieri poteſt, contingat eandem quoque in puncto C recta I C K, diametroque L M, eidem I C K æquidiſtanti, altera conjugata ducatur N O, (quæ cum à priori

C F

[1] per 4 Cor. 14 hujus. CF diversa sit [1], punctum N cum puncto C non coïncidet,) ac per N ipsi L M, ideoque & contingenti I C K, æquidistans ducta sit P Q. Cadet itaque [2] punctum C, adeoque recta I C K infra rectam P N Q: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò & eodem modo [3] punctum N, ideoque recta P N Q, infra contingentem I C K: nempe, versùs idem centrum cadet. quod repugnat. Non contingit ergo I C K Ellipsin. Eadem de omnibus aliis est demonstratio, ac proinde constat propositum.

[2] per 2 Cor. 13 hujus.

[3] per idem Coroll.

Corollarium.

Constat itaque [4] in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æquidistantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi [5]. & contra, quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in eodem vertice contingere.

[4] per Coroll. præcedens.

[5] per 4 Cor. 13 hujus.

THEOREMA XVI.

Propositio 18.

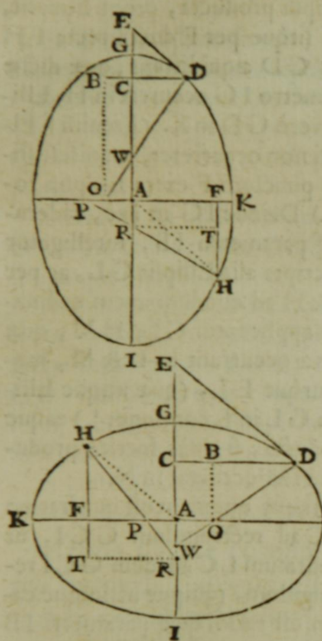
Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum sub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, semidiametri quadrato æquale, & contra.

Quamcunque Ellipsin G D, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque sumpto, recta D E, diametro I G occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata sit D C: dico rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

Sit enim primùm axis diameter I G, sitque O W *describens*, in statione uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum D; ita ut O D *intervallum* semi-axi A G æquale sit, P R autem *describens* in statione, ipsi O W reciprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod nempe

nempe *deſcribenti* P R in directum eſt, ducta diameter H A conjugata ſit ei, quæ per D & A duceretur [1], ideoque & contingenti D E parallela [2]. Sitque porrò ad ſecundum axem A K applicata H F, ducanturque O B, R T ipſis A G, A K æquidiſtantes, quæ applicatis D C, H F, productis, ſi opùs fuerit, occurrant in B & T.

[1] per 4 Cor. 14 hujus.
[2] per Cor. 17 hujus.



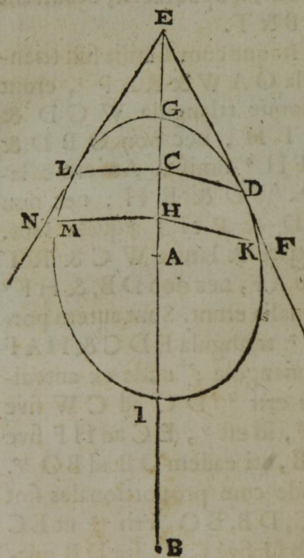
Itaque cum ſimilia ſint triangula O A W & R A P [3], erunt quoque triangula W C D & R T H, nec non O B D & P F H [4] ſimilia. At verò & latera W D & R H, nec non O D & P H [5] æqualia ſunt. Quare & latera W C & R T ſive A F, nec non D B, & H F [6] æqualia erunt. Sunt autem porrò [7] triangula E D C & H A F æquiangula; unde ex antedictis erit [8] D C ad C W ſive A F, id eſt [9], E C ad H F ſive D B, uti eadem D B ad B O [10]. Unde cum proportionales ſint E C, D B, B O, erit [11] ut E C ad B O ſive C A, ita D B quadratum ad B O quadratum; & componendo [12], ut E A ad C A, ita [13] D O quadratum ad B O quadratum, hoc eſt, G A quadratum ad C A quadratum; ac proinde [14] & rectæ E A, G A, C A proportionales erunt, ideoque [15] rectangulum C A E quadrato ſemi-axis A G æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipſam D E Ellipſin contingere non poſſit [16], patet converſum quoque verum eſſe: nimirum, ſi rectangulum C A E æquale ſit quadrato ſemi-axis A G, & per C ordinatim applicata Ellipſi occurrat in D, junctam E D eſſe contingentem.

[3] ex conſtructione.
[4] per 29 primi, & 21 ſexti.
[5] ex conſtructione.
[6] per 26 primi.
[7] per 29 primi.
[8] per 4 ſexti.
[9] propter triangula EDC, HFA æquiang.
[10] propter triangula DCW, DBO æquiangula.
[11] per Cor. 20 ſexti.
[12] per 18 quinti.
[13] per 47 primi.
[14] per Cor. 20 ſexti.
[15] per 17 ſexti.
[16] per 17 hujus.

Deinde non ſit recta I G Ellipſeos G D axis, ſed alia diameter quæcunque, cujus parameter I B, atque ab aſſumpto in curva

utcunque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur D C, sitque quadrato semidiametri A G æquale rectangulum C A E: dico junctam E D, productamque, totam extra Ellipsin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & conversim.

Sit enim in eadem E D, aut in ipsa producta, prout libuerit, assumptum utcunque punctum F, sitque per F ducta recta F H ipsi C D æquidistans, quæ dictæ diametro I G occurrat in H, Ellipsi verò G D in K. (Etenim si Ellipsi non occurreret, manifestissimè punctum F extra Ellipsin foret.) Deinde I G ut axe, eademque parametro I B, intelligatur descripta alia Ellipsis G L, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur C L, H M, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque E L, (quæ utique Ellipsin G L in L continget [1],) eaque producta, si opus fuerit, productæ H M occurrat in N.



[1] per sup. demonstr.

Itaque quoniam est quadratum D C ad rectangulum G C I, ut quadratum L C ad idem G C I rectangulum, (quippe utriusque eadem est ratio, quæ parametri I B ad diametrum sive axem I G [2]:) erunt [3] quadrata D C, L C, ideoque & rectæ D C, L C æquales. Eodem modo, & rectas K H, M H æquales esse, demonstrabitur. At verò cum sit C D ad H F, ut C L ad H N, (siquidem [4] utriusque eadem est ratio, quæ rectæ E C ad rectam E H,) erunt quoque [5] H F & H N æquales. Est autem H N major applicatâ H M, cum contingens sit E L N: ergo & H F applicatâ H K major erit, ideoque punctum F, in recta E D F utcunque sumptum, hoc est, tota E D F, extra Ellipsin, G D cadet, sive, quod idem est, eandem in puncto D continget. Cumque non possit præter E D F alia recta eandem Ellipsin in puncto D contingere [6], manifestum quoque est conversum: si nempe E D Ellipsin G D in

[2] per 13 hujus, & Cor. 20 sexti.
[3] per 9 quinti.
[4] per 4 sexti.
[5] per 14 quinti.
[6] per 17 hujus.

in D contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata sit D C, rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

Corollarium.

Ex dictis perspicuum est, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ Ellipsin contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti D: jam supra [1] ostensum est, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

Ductâ ex D ad inventam [2] diametrum G I rectâ ordinatim D C, fiat rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale, jungaturque E D.

At si extra Ellipsin sit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum [3] rectâ E A, quæ Ellipsin secet in G, quadrato A G æquale fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicatâ C D: nimirum, quæ [4] æquidistet contingenti quæ per G duceretur [5], occurratque Ellipsi in D, jungatur E D: eritque hæc ipsa tam priori quàm posteriori casu [6] contingens quæsita.

A puncto autem intra Ellipsin dato non posse duci rectam, quæ eandem contingat, manifestissimum est.

Atque ita me compendiosè viâ satis planâ ac maximè naturali, absque ulla solidi consideratione, Elementa proprietatesque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni sectiones* appellavêre, tradidisse confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipsin pertinent, absque ulteriori manuductione facillimè deducet, quicunque animum iis debitè applicuerit, atque in Geometricis per se ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eâdem tractandi methodo hisce diutiùs inhærere supervacuum putem, præsertim cum insignis & sublimior quædam scientia supersit, cui Veteres enixissimè incubuisse ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifestum est; quæque tam ab iisdem

[1] *in Cor. 16. hujus.*
[2] *per 2 Cor. 15 hujus.*
[3] *inventum per 2 Coroll. 15 hujus.*
[4] *juxta Cor. 17 hujus.*
[5] *per præcedentia, aut 5 Coroll. 14. hujus.*
[6] *per 18 hujus.*

quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* sive *Compositio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæterisque Geometris ea præcipuè conscripta esse, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis superaddidere, omnino credibile est. Cumque penitiorem curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac distinctionem, ut & distributionem in sua genera & species, cum segregatione earum, quæ verè Geometricæ non sunt, ab iis quæ in Geometriam sunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam existimem: è re fore duxi, eandem tractationem hîc subjungere, non quidem eâ methodo, sicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem sufficeret, si vel tantùm *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo judicio, minùs rectè,) vocârunt, id est, quæ vel *recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipsis*, sive *circuli circumferentia* existunt, (quorumque Locorum Compositioni eos solummodo intentos fuisse invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immensum excresceret, si ad Loca, quæ sunt lineæ curvæ secundi generis, uti nobis propositum est, extenderetur; sed Arte Analyticâ per Æquationum examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino casus possibiles resolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis eum ordinem sumus observaturi, ut jam post explicationem Elementorum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipsis, (suppositâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ sunt vel ex prædictis curvis constant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumq;* nomine venient) atque eo ipſo oſtendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non niſi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipſin eſſe recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas ſecundi generis, ſimiliter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipſarum generationem viam ſternant non tantùm deſcriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propoſitæ atque explicatæ, ſed & multi alii illas in plano deſcribendi modi: operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti ſunt, ut quilibet huic ſpeculationi intentus facilè experietur, vel illos ſaltem hîc adjungere, quos aut ad deſcriptiones curvarum ſecundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

Caput IV.

Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipſin in plano delineandi Methodus.

Sit triangulum quodcunque iſoſceles A B C, & tam æqualia crura A B, A C, quàm baſis B C utrinque indefinitè producantur, ut ad D, E, & F, G, nec non H I; ſitque ab alterutro angulorum ad baſin ducta quævis recta terminata, oppoſito cruri æquidiſtans, ut B K, & per terminum ejuſdem K altera recta, utrinque indefinitè extenſa, liberè tranſeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A, ut Polum, circulariter mobilis ſit, veluti L A K M; ac denique rectæ F G inſiſtens C N ipſi D E parallela tranſeat per ipſarum F G & H I interſectionem C. Dico, ſi angulus E B H atque ipſi ad verticem D B I cum recta B K moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus A B ſemper applicatum maneat rectæ D E, ſimulque recta H I huc atque illud promoveat rectam C N, ſibi ipſi ſemper æquidiſtan-

 tem,

tem, ac recta B K ad polum A circulariter moveri faciat prædictam L M, per punctum K semper transeuntem, intersectionem ipsarum C N, L M, quæ fit ad O, Parabolam describere, cujus diameter est A D, parameter K B, ac F G eandem contingens in vertice A.

In quacunque enim statione constitutus fuerit angulus E B H seu D B I, si intersectio rectarum F G, H I designetur per C, atque ab intersectionis puncto O ad diametrum applicata sit O P ipsi F G æquidistans: erit semper K B ad B A, hoc est, ad A C, uti eadem A C ad C O [1]: ac proinde [2] rectangulum sub K B, C O, id est [3], sub K B, A P quadrato rectæ A C, hoc est [4], ipsius O P æquale. Unde si B A C angulus rectus fuerit, erit A D axis, sin minùs diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipsi B A C vel B A G angulo æquales.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 17 sexti.
[3] per 34 primi.
[4] per eandem.

In transitu etiam hîc notandum est, eodem illo motu per intersectionem ipsarum H I, L M, puta Q, Hyperbolam sive oppositas

positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum B A C isosceles non foret, nec etiam recta B K ex angulari puncto B sed ubivis in recta A D educta esset, nihilominus tamen curvam A O Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quoque casibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descriptam, si *anguli mobiles* inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque Mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque *efficiente* I G, *intervallo* A L, & *directrice* K L O, angulis autem I A L & K L A inæqualibus, descripta curva D A M: dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à *Polo* A ad *directricem* rectâ A K, ita ut angulus L A K angulo L A G æqualis sit, centro A & intervallo A K circulus describatur, secans *efficientem* in I & G, ac *directricem* in K & Q [a], perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ I K, G Q, sibi mutuò occurrentes in F, rectas F I, F G Asymptotos esse [b].

Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut O A D, quàm *describens*, ut O D, in statione uti fuêre, cùm per eas descriptum est punctum D. Quoniam igitur æquales sunt anguli A I K, A K I inter se [1], nec non simul sumpti angulo K A G, (quippe tam posterior quàm priores [2] cum angulo I A K binos rectos constituunt): erunt quoque anguli A I K seu A I F & G A L, utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea [3] rectæ I K F & A L parallelæ [c]; ideoque sicut I K F rectæ F G occurrit, ita & eidem F G occurrent

[a] aut eandem in K contingens, uti in casu fig. V exhibito.

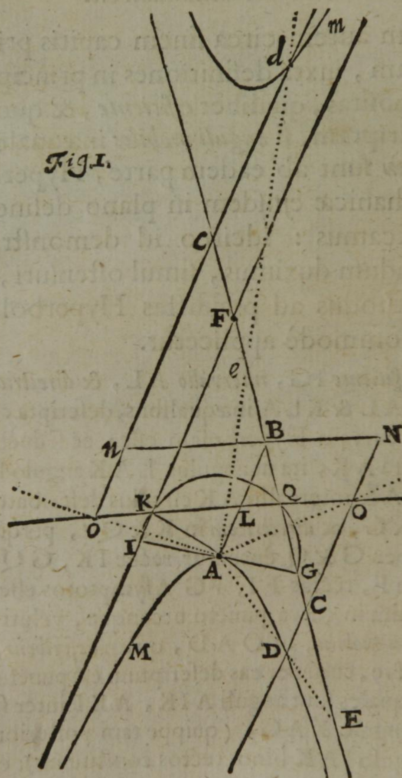
[b] si verò dictorum punctorum bina coïncidant velut I & K in III, ac G & Q in IV fig. tangat ibidem circulum recta, ut I F, in priori, & G F in posteriori eum contingere cernitur.

[1] *per 5 primi.* [2] *per 13 & 32 primi.* [3] *per 28 primi.*

[c] in casu fig. III, quoniam uterque angulorum A I F & G A L rectus est, rectæ I F, A B parallelæ erunt.

rent describentes AL & OD, utpote ipsi IKF æquidistantes. Sint itaque ipsarum occursus in B & C, ac per B agatur recta BN directrici KO æquidistans, occurrensque describenti DO in N: eritque ut GA ipsi AI, ita [1] GB ipsi BF æqualis. Cum

[1] per 2 sexti, & 14 quinti.



autem in triangulis LAK, OQC æquales sint anguli ad L & O, (propter [2] AL, CO parallelas,) sitque & angulus LAK sive GAL, id est, GIF, æqualis angulo OQC, (quippe tam hic quàm ille cum angulo KQG, vel KQE duos rectos constituit

[2] per 29 primi.

tuit

tuit [1],) [d] æquiangula erunt eadem triangula LAK & OQC sive [2] NBC. Porrò, quoniam angulus AGE angulo IKO seu ALO æqualis est, (quippe tam hic quàm ille cum angulo IGQ sive IGF [3] binos rectos constituit [e],) atque angulis LAG, OAD iisdem sive æqualibus addito vel ablato communi OAG [f], compositi vel residui LAO, GAD vel GAE æquales quoque sunt, ac LO, AO sibi mutuò occurrant; GE quoque & AD sibi mutuò occurrant necesse est; sit itaque ipsarum occursus E punctum; & æquiangula erunt triangula, AGE, ALO, eritque propterea [4] AL ad AG, ut LO sive NB ad GE. At verò (ob

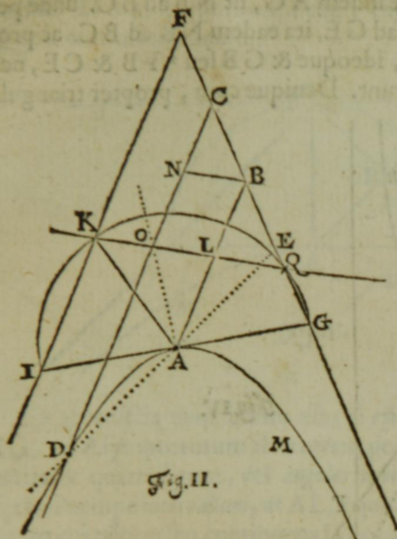


Fig. II.

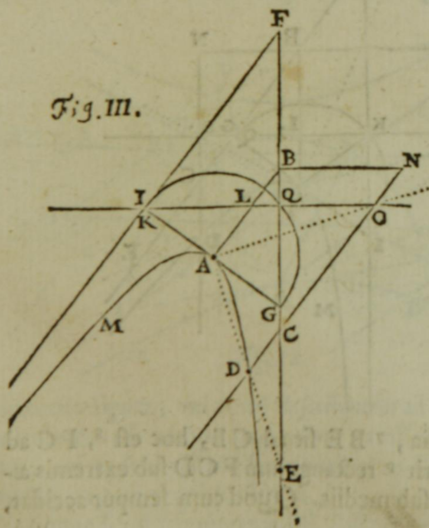


Fig. III.

[1] in I & II fig. per 13 primi, & 22 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.

[d] in casu fig. III apparet, tam angulum OQC quàm LAK rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii: ac in fig. V & VI angulos GIF & OQC æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem.

[2] per 29 primi.

[3] in fig. I, per 13 primi & 22 tertii; in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo IGQ æqualis est IKQ per 21 tertii.

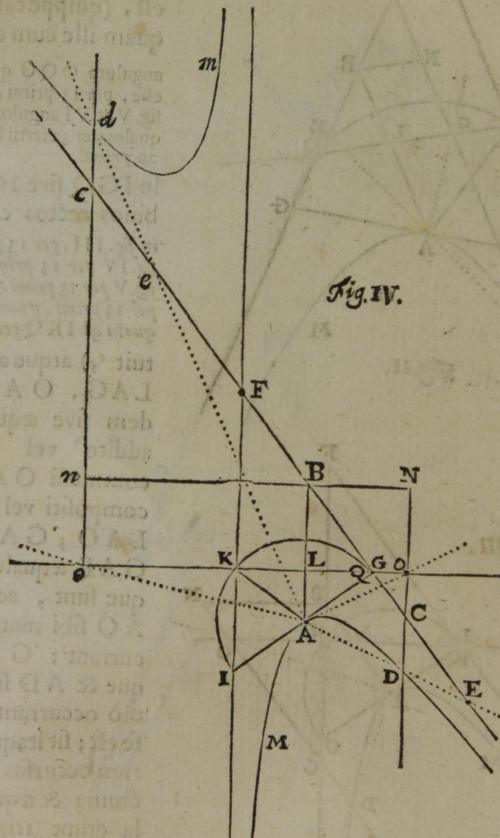
[e] in fig. II angulus AGE angulo ALO est æqualis, quia uterque cum angulo IKQ duos rectos constituit, per 29 primi & 22 tertii.

[f] vel, in casu fig. II & similibus, BAE.

[4] per 4 sexti permut.

[1] per sup. dem. [2] per 4 sexti. [3] per 11 quinti. [4] per 9 quinti. [5] per sup. demonstr.

(ob triangula LAK & NBC [1] similia) est quoque [2] eadem AL ad AK, hoc est, ad eandem AG, ut NB ad BC. unde per consequens erit [3], ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. ac proinde [4] rectæ GE & BC, ideoque & GB seu [5] FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula



[6] per 29 primi. [7] per 4 sexti. [8] per sup. demonstr. [9] per 16 sexti.

ABE & DCE [6] similia, [7] BE sit ad CE, hoc est [8], FC ad FB, ut BA ad CD: erit [9] rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-

ubicunque in curva assumptum fuerit D punctum, sequitur [x] curvam DAM Hyperbolam esse, cujus Asymptoti FI, FG. Quod erat ostendendum.

[x] per 3 hujus.

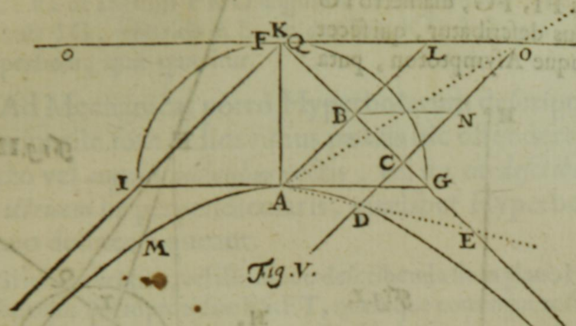


Fig. V.

Ex antedictis manifestum est, si *efficiens* seu [a] contingens, ut IG, ad Asymptotorum alterutram perpendicularis sit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* LAI & LAG rectos fore, si nempe *intervallum*, ut AL, æquidistans ductum sit ei Asymptoto cui *efficiens* seu contingens IG ad angulos rectos occurrit, ut

[a] per 6 hujus.

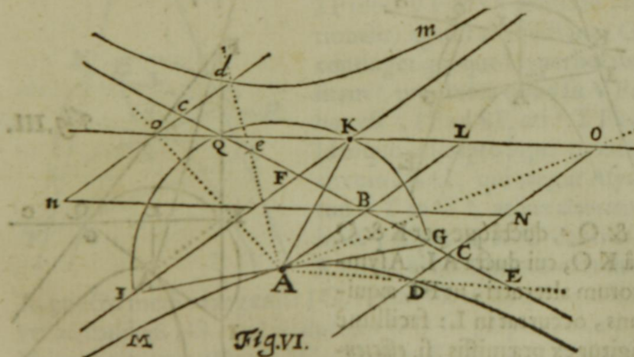


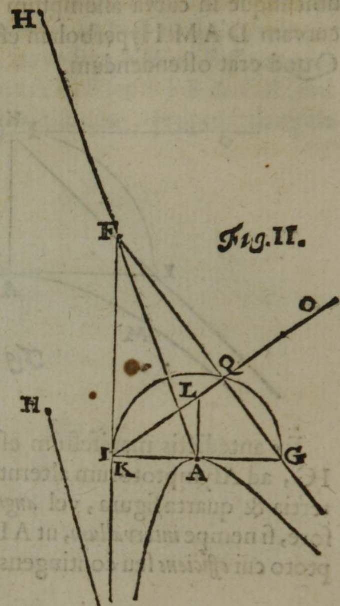
Fig. VI.

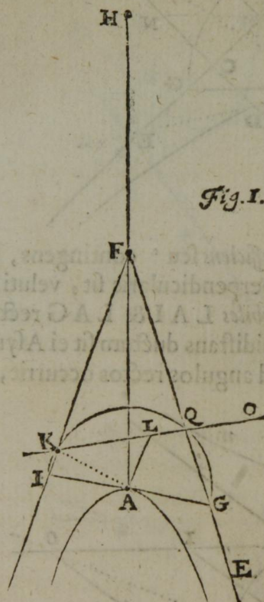
in tertia figura, vel certè *describentem* ad *directricem* fore perpendicularem, si nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Asymptoto, cui eadem *efficiens* seu contingens GI occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

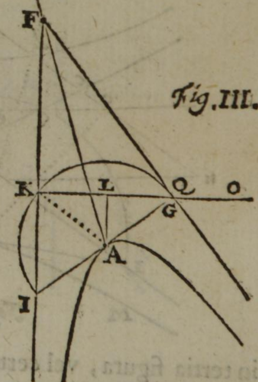
Itaque si vel Asymptotis FI, FG, & contingente IG; vel dia-

 metris

metris conjugatis H A, I G, Hyperbola sit describenda, ductis in casu posteriore Asymptotis F I, F G, diametro I G circulus describatur, qui secet utramque Asymptoton, puta







in K & Q [a], ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Asymptotorum alterutri, ut F I, æquidistans, occurrat in L: facillimè colligitur ex præmissis, si, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva describatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

[a] aut alteram tangat, & alteram secet, ut in II fig. fit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

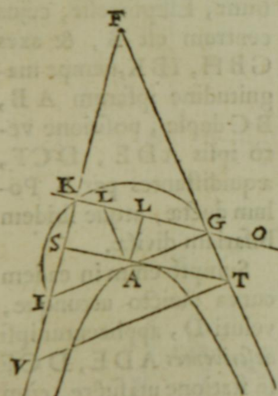
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occursus evitemus, hæc eadem absque Circuli descriptione efficere expediet.

Ita-

Itaque si, ductâ A L Asymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis sit, & per K recta K O secans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis sit: erit curva, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint F S, F T, quamque contingat recta S T, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere supponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita sumptum ut I F inter V F & S F media sit proportionalis) agatur æquidistans I G, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam [1], propterea quòd sit V F ad I F, hoc est [2], I F ad S F, uti [3] T F ad G F. Ideoque descripto super eandem I G circulo I K G, qui tangat Asymptoton F T in G [4], atque alteram secet in K, si per K & G ducatur recta K G O, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis I G, recta A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* I G, *directrice* K O, atque *intervallo* A L, ad eandem *efficientem*, dictamvè *directricem* perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.



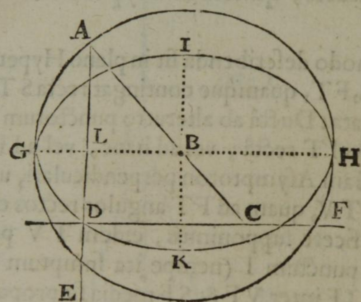
[1] *per 9 hujus.*
[2] *ex hypothesi.*
[3] *per 2 sexti, & componendo per 18 quinti.*
[4] *per Cor. 16. tertii.*

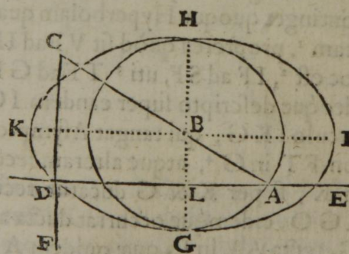
Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel ita

ita ut *describens* ad *directricem* datos quoslibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm sequentem quoque Ellipsin in plano describendi rationem hîc adjecisse suum aliquando usum habebit.

Recta linea, ut A B C, ad Polum B circulariter mota binis sui punctis A & C, in eadem utcunque assumptis (sive B sit inter A & C, sive C sit inter A & B,) promoveat rectas A D E, D C F, sibi ipsis semper æquidistantes, ac se invicem ad rectos angulos intersecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem intersectione, veluti D, describitur, Ellipsin esse, cujus centrum est B, & axes G B H, I B K, nempe magnitudine ipsarum A B, B C duplæ, positione verò ipsis A D E, D C F, æquidistantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam divisæ.





Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipsi *describentes* A D E, D C F in statione uti fuêre, cùm per illarum intersectionem descriptum est punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti A D E, vel hanc vel illam ductarum G H, I K, ex. gr., ipsam G H, secat, ut in L. & sit G A H circumferentia Circuli, qui per motum puncti A describitur. Quoniam itaque est [1] A B quadratum ad B C quadratum, hoc est, G B quadratum ad B K quadratum, ut A L quadratum sive [2] G L H rectangulum ad L D qua-

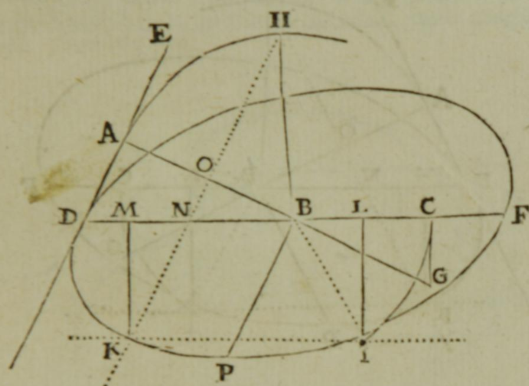
[1] *per 2 & 22 sexti.*
[2] *per 14 secundi, vel 35 tertii.*

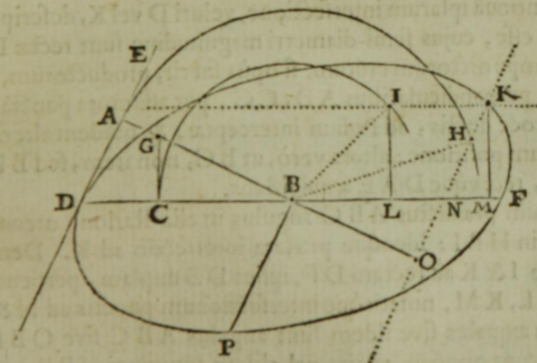
quadratum: constat [a], curvam G K H, uti prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt G H, I K.

[a] per 13 hujus.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

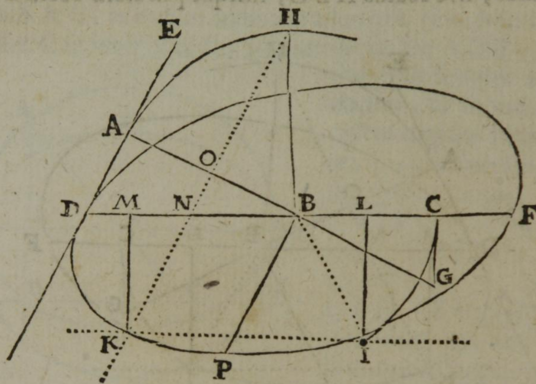
Non sit deinde A B C una linea recta, sed angulus quicunque, sive obtusus, sive acutus A B C, sintque prædictæ rectæ D A E,





D C F in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni cruri

cruri coïncidit, (quemadmodum in statione A B C recta D C F coïncidit cruri B C,) altera ad reliquum crus sit perpendicularis, (sicut in eadem statione recta D A E ad crus A B perpendicularis est:) dico iterum, si angulus A B C circa Polum B circulariter motus punctis A & C in utroque crure utcunque assumptis promoveat rectas D A E & D C F sibi ipsis semper æquidistantes, cur-



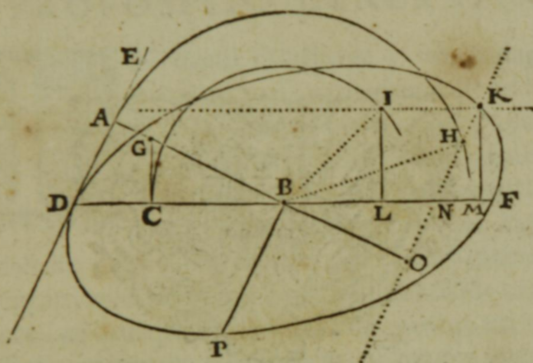
vam, continuâ ipsarum intersectione, veluti D vel K, descriptam, Ellipsin esse, cujus semi-diametri magnitudine sunt rectæ D B, B G, nempe dictorum crurum, si opùs fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus A D, C G, per assumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti D B, etiam positione; altera verò, ut B G, non item, sed B P ipsi æqualis, rectæque D A E æquidistans.

Sit enim prædictus A B C angulus in alia statione utcunque, ex. gr., in H B I; ideoque præfata intersectio ad K. Demissis autem ab I & K ad rectam D F, ipsius D B duplam, perpendicularibus I L, K M, notatisque intersectionum punctis ad N & O, quoniam æquales sive iidem sunt angulus A B C sive O B L & H B I, erunt quoque, addito vel ablato communi H B F, anguli H B O & I B L æquales; ideoque triangula H B O & I B L, ob angulos præterea ad O & L rectos [1], æquiangula. Sunt autem [2] &

[1] *ex hypothesi, & per 29 primi.*
[2] *per 21 sexti.*

& æquiangula triangula C B G & M N K, cum tam hoc quàm illud triangulo O B N ſimile ſit [1]: quare cum ſit [2] D B quadratum ad N B quadratum, ut A B quadratûm, id eſt [3], H B quadratum, ad O B quadratum, erit [4] per converſionem rationis D B quadratum ad D N F [5] rectangulum, ſicut H B quadratum ad H O [6] quadratum, id eſt [7], uti B I quadratum ad I L quadratum, vel uti B C quadratum ad K M quadratum [8], id eſt [9], uti B G ſive B P quadratum ad K N quadratum, & permutando [10] D B quadratum ad

[1] ob angulos ad C, O, & M rectos, ad B verò & N ſive eoſdem ſive ad verticem.
[2] per 4 & 22 ſexti.
[3] ex hypotheſi. *[4] per Cor. 19 quinti.* *[5] per 5 ſecundi.* *[6] per 47 primi.* *[7] per 4 & 22 ſexti.* *[8] æqualis eſt enim B C ipſi B I, & I L ipſi K M.* *[9] per 4 ſexti, propter triangula C B G & M K N æquiangula.* *[10] per 16 quinti.*



B P quadratum, ut D N F rectangulum ad K N quadratum. Ac proinde Ellipſis eſt curva D K P F, interſectione uti prædictum eſt deſcripta [11], cujus ſemi-diametri conjugatæ D B, B P; ideoque B centrum, ac D A E contingens Ellipſin in vertice D [12].

[11] per 13 hujus.
[12] per 2 Cor. 13 hujus.

Notandum hîc eſt, quòd ſi rectus foret A B C angulus, interſectione, uti prædictum eſt, non curvam, ſed rectam lineam deſcribi.

Quemadmodum autem Ellipſin, quæ ſuperiùs per motum puncti in una eademque recta deſcripta fuit, nunc per duarum rectarum interſectionem delineavimus,

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes solummodo per similes intersectiones in præcedentibus exposuimus, per motum puncti in una eademque recta describi possunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ sunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propositas existimamus, hisce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum*, *Solidorumq;* inventiones ac determinationes progredimur.



JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CURVARUM LINEARUM.

LIBER SECUNDUS.

CAPUT I.

PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæſtione, ubi indagandus proponitur Locus, ſive is ſit ad lineam rectam, ſive ad curvam, ſuppoſitis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel aſſumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, aſſumptum quodlibet quæſiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos erit reducta, ſi neutra incognitarum ad duas pluréſve dimenſiones aſſurgat, hoc eſt, ſi neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſeu multiplicata reperiatur, quæſitus Locus erit linea recta: At ſi earundem incognitarum altera ad quadratum aſcendat, altera verò non item, ſed neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſit, erit Locus quæſitus Parabola. Quòd ſi verò utraque ad quadratum aſcendat, ſive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non aſſurget, ſi de loco Plano Solidovè quæſtio ſit): erit Locus quæſitus vel Hyperbola, vel Ellipſis, vel Circuli circumferentia.

Quorum quidem omnium particularis determinatio, deſcriptio, & demonſtratio variis modis fieri poteſt; at verò ex ſimpliciſſimis, generaliſſimisque aliquem annotaſſe ſuffecerit.

Ac primo quidem caſu, cùm neutra quantitatum incognitarum ad duas pluréſve dimenſiones aſcendit, ſi earum una exprimatur per x, atque altera per y, poteſt æquatio ad aliquam ſequentium formularum reduci.

I. $y \infty \frac{bx}{a}$, ſive (poſito $a \infty b$) $y \infty x$.

II. $y \infty \frac{bx}{a} + c$, ſive, poſito, ut ſupra, $y \infty x + c$.

III. $y \infty \frac{bx}{a} - c$, ſive $y \infty x - c$.

IV. $y \infty - \frac{bx}{a} + c$, ſive $y \infty - x + c$.

Fiat autem earundem quantitatum incognitarum ſecundùm regulam talis aſſumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipſius x, certum ſit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta poſitione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis lineâ priori in extremitate incerta in dato vel aſſumpto angulo conjungi. Quibus quidem ſuppoſitis, ea, quæ prædicta ſunt, ſequentibus Theorematîs non incongruè proponi, determinari, ac demonſtrari poſſe videntur.

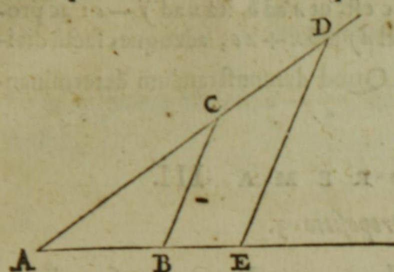
THEOREMA I.

Propoſitio 1.

Si æquatio ſit $y \infty \frac{bx}{a}$, erit locus quæſitus linea recta.

Sit enim ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur. Dein, ſumpto in eadem A B puncto utcunque, veluti B, agatur B C in angulo

angulo A B C, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ A B ad ductam B C, quæ est *a* cognitæ ad *b* cognitam.



hoc est, ut sit uti *a* ad *b*, ita A B ad B C. Denique per puncta A & C ducatur recta A C, indefinitè extensa, eritque hæc ipsa locus quæsitus.

Etenim assumpto in A C puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo D E A, dato vel assumpto æquali, si eadem D E vocetur y, erit [1] ut A B ad B C, hoc est, ut *a* ad *b*, ita A E ad E D, hoc est, ita x ad y. Et fit [2] $ay \infty bx$, hoc est, dividendo utrinque per *a*, erit $y \infty \frac{bx}{a}$.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.

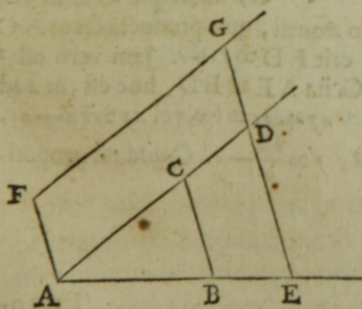
[2] per 16 sexti.

Quare cum punctum D utcunque sumptum sit in linea A C, erit eadem de omnibus aliis lineæ A C punctis demonstratio, ac proinde ipsa A C locus est quæsitus. Atque ita non solùm Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta A F ipsi B C parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis *c* cognitæ. Et ex F ductâ F G parallelâ A C, dico eandem F G esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque G E in angulo A E G,

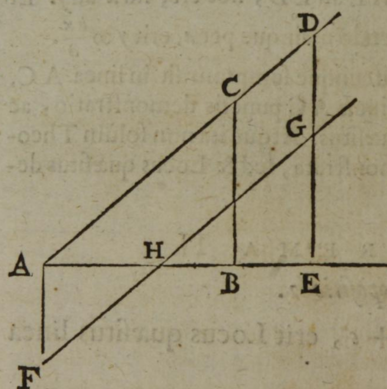
dato vel assumpto æquali, quæ secet rectam A C in D, si eadem G E vocetur y, erit E D ∞ $y - c$. At verò est, ut supra [1], uti A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y - c$: ac propterea [2] $ay - ac$ ∞ bx, vel ay ∞ $bx + ac$, adeoque, factâ divisione per a, y ∞ $\frac{bx}{a} + c$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] *per 29 primi, & 4 sexti.*
[2] *per 16 sexti.*

THEOREMA III.

Propositio 3.

Si æquatio sit y ∞ $\frac{bx}{a} - c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis factisque ut in Theoremate 1mo, agatur insuper ex A recta A F, ipsi B C parallela, atque ad oppositas cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ iterum F G ipsi A C parallelâ, secante rectam A B in H, dico H G esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet A C in D, si eadem G E vocetur y, erit E D ∞ $y + c$. Jam verò est [3] ex constructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y + c$: ac propterea [4] $ay + ac$ ∞ bx, vel ay ∞ $bx - ac$, adeoque, factâ divisione per a, y ∞ $\frac{bx}{a} - c$. Quod est propositum.

[3] *per 29 primi, & 4 sexti.*
[4] *per 16 sexti.*

THEO-

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Si æquatio sit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæsitus linea recta.

Positis, factisque, ut in Theoremate 2do, excepto quòd punctum C ab opposita parte ipsius AB cadat, quodque angulus ABC æqualis sit dati vel assumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta FG ipsi AC parallela, occurrens rectæ AB in H: dico FH esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in FH puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet AC in D, si eadem GE vocetur y, erit ED $\propto c - y$. Cumque sit [1] ex constructione, ut AB ad BC, ita AE ad ED, hoc est, ut a ad b, ita x ad $c - y$: erit propterea [2] $ac - ay \propto bx$, vel $ay \propto ac - bx$, id est, dividendo utrinque per a, $y \propto c - \frac{bx}{a}$. Quod erat propositum.

[1] *per* 13 & 29 *primi*, & 4 *sexti*.
[2] *per* 16 *sexti*.

At verò fieri etiam potest, ut per operationem, priusquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evanescat, alteraque sola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

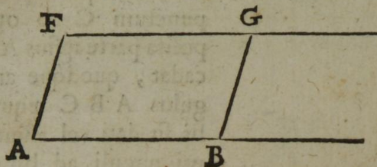
exindę binæ insuper formulæ nascuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

1. $y \infty c$, vel
2. $x \infty c$.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Si æquatio sit $y \infty c$, Locus quæsitus est linea recta.



Sit quantitatis x, quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ AF ∞c, faciente cum AB angulum, ipsi dato vel assumpto aut ejusdem ad binos rectos supplemento æqualem, si ex F agatur FG ipsi AB parallela, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

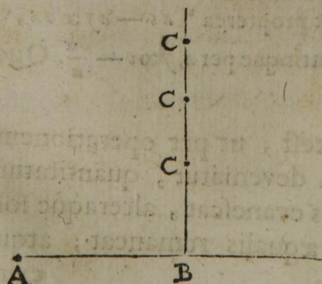
Etenim assumpto in FG puncto utcunque, veluti G, ductâque GB ipsi AF parallelâ, apparet eandem GB omnesque ipsi æquidistantes [1] rectæ AF fore æquales, hoc est, esse $y \infty c$. Quod erat demonstrandum.

[1] *per 34 primi.*

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Si æquatio sit $x \infty c$, erit Locus quæsitus linea recta.



In linea AB, quæ, ut supra, pro x concepta sit, sumatur à puncto A longitudo AB æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel assumpto angulo ducatur recta BC. dico eandem BC, indefinitè productam, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto

cto utcunque, veluti C, erit ex hypothesi C B cum priore A B comprehendens angulum A B C dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem C B vocari y. At verò est ex constructione, & remanet semper A B, hoc est, $x \propto c$. Quod est propositum.

CAPUT II.

POrrò secundo casu, supra expresso, cùm nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & yy \propto ax \\ \text{II.} & yy \propto ax + bb \\ \text{III.} & yy \propto ax - bb \\ \text{IV.} & yy \propto -ax + bb \end{array}\right\} \text{vel conversim} \left\{\begin{array}{l} ay \propto xx \\ ay + bb \propto xx \\ ay - bb \propto xx \\ bb - ay \propto xx. \end{array}\right.$$

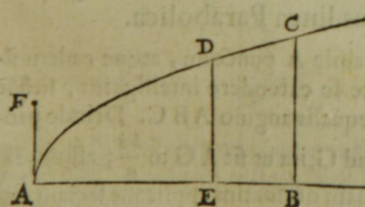
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latiùs explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \propto ax$, vel conversim $ay \propto xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus vel assumptus angulus æqualis angulo A B C; Assumatur primò eadem A B ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum A F

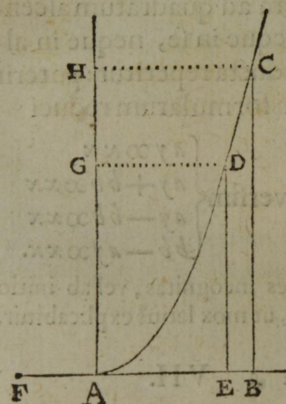


[1] per 10 Coroll. primi, & 4 Coroll. secundi hujus.

sit æquale a cognitæ. Dico Parabolam A D C, quæ [1] per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞a, esse Locum quæsitum.

[2] per 1 primi hujus.

Sit enim in eadem curva A D C assumptum punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur y, erit, ex natura Paraboles [2], quadratum ex E D ∞ F A E rectangulo, hoc est, $yy \infty ax$. Quod erat propositum.



Ad demonstrationem autem secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta A H ipsi B C parallela, atque eadem A H assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo A B C seu A H C æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabola A D C Locus quæsitus.

[3] per 1 primi hujus.

Est enim [3] quadratum ex G D sive A E quadratum æquale rectangulo sub F A & A G, seu F A & E D, id est, $xx \infty ay$. Quod erat demonstrandum.

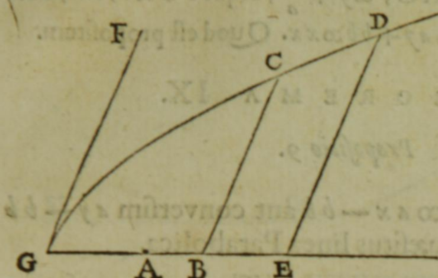
THEOREMA VIII.

Propositio 8.

Si æquatio sit $yy \infty ax + bb$ aut conversim $ay + bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo A B C. Deinde producatur A B versùs A usque ad G, ita ut sit A G $\infty \frac{bb}{a}$; assumptâque G B pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum

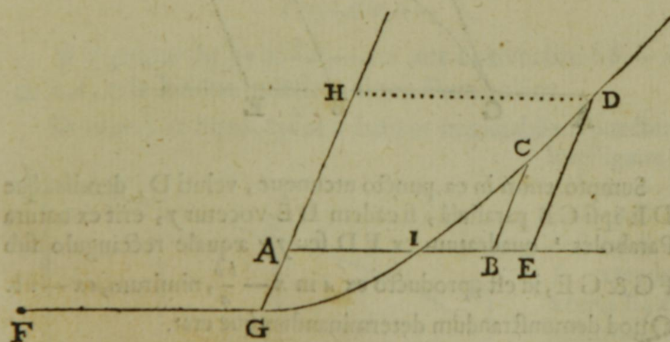
rectum G F sit æquale *a* cognitæ: dico Parabolam G C D, quæ per prædictæ diametri verticem G descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞ *a*, esse Locum quæsitum.



Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur *y*, quoniam G E sive A E + A G est ∞ $x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D ∞ rectangulo sub F G & G E, erit yy ∞ $ax + bb$. Quod primò erat demonstrandum.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut A G sit ∞ $\frac{bb}{a}$, dico, si ad G H diametrum latere recto G F ∞ *a* Parabola describatur ut G C, quæ secet rectam A B in I, curvam I D esse Locum quæsitum.



Est enim [2] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H con-

[2] per 1 primi hujus.

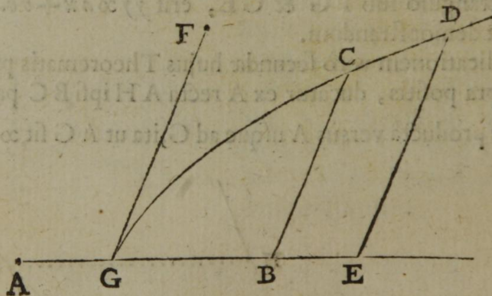
contentum æquale quadrato ex HD seu AE, ac proinde, quoniam GH, sive DE + AG, $\infty y + \frac{bb}{a}$, atque FG ∞a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \infty xx$. Quod est propositum.

THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \infty ax - bb$ aut conversim $ay - bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab AB recta AG $\infty \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam GCD esse Locum quæsitum.

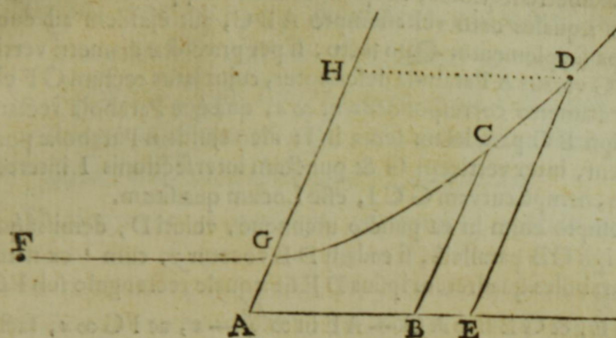


Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y, erit ex natura Paraboles [1] quadratum ex ED seu yy æquale rectangulo sub FG & GE, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] *per 1 primi hujus.*

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela, atque ab ea subductâ AG $\infty \frac{bb}{a}$, sumatur GH pro diametro, &c. ut supra, dico curvam GCD fore Locum quæsitum.

Est



Est enim [1] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H contentum æquale quadrato ex H D seu A E, ideoque, quoniam G H sive D E — A G æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque F G ∞ a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb$ ∞ xx. Quod erat propositum.

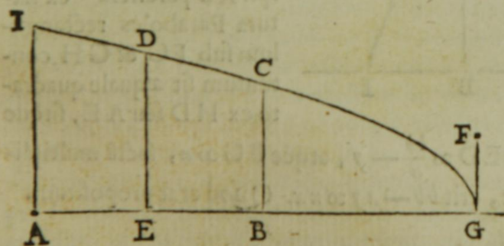
[1] per eandem.

THEOREMA X.

Propositio 10.

Si æquatio sit yy ∞ $bb - ax$ aut conversim $bb - ay$ ∞ xx, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit enim, ut supra, ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturq́; eadem x in recta A B indefinitè se ab A extendere versùs B; angulus verò datus vel assumptus esto æqualis angulo

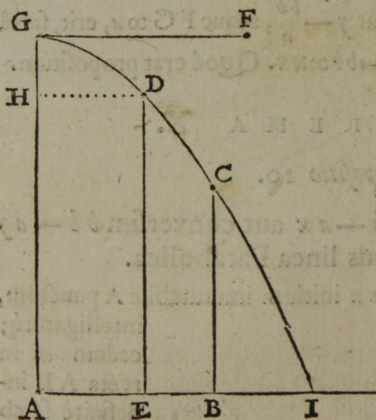


A B C. Deinde ab A versùs B assumptâ A G ∞ $\frac{bb}{a}$ sumatur G A

pro diametro sectionis, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto A B C, aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Quo facto, si per prædictæ diametri verticem G versùs A Parabola describatur, cujus latus rectum G F eidem diametro correspondens sit ∞ a, quæque Parabola rectam A I ipsi B C parallelam secet in I: dico ejusdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum intersectionis I interceptam, nempe curvam G C I, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque D E ipsi C B parallelâ, si eadem D E vocetur y, cum [1] ex natura Paraboles quadratum ipsius D E sit æquale rectangulo sub F G & G E, & G E sive A G — A E sit ∞ $\frac{bb}{a} - x$, ac F G ∞ a, factâ debitâ multiplicatione, erit yy ∞ $bb - ax$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] *per 1 primi hujus.*



Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ex A ducatur A G ipsi B C parallela atque ∞ $\frac{bb}{a}$, assumaturque G A pro diametro, &c. per omnia, ut supra, excepto quòd punctum intersectionis I sit in recta A E.

Cum enim ductâ D H ipsi A B parallelâ [2] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H contentum sit æquale quadrato ex H D seu A E, sitque G H sive A G — E D ∞ $\frac{bb}{a} - y$, atque F G ∞ a, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay$ ∞ xx. Quod erat propositum.

[2] *per eandem.*

Regula

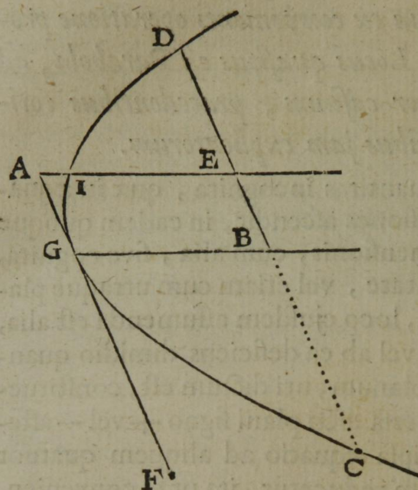
Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæsitus est Parabola, ad aliquem quatuor casuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimensiones ascendit, in eadem quoque inveniatur unius dimensionis, cum alia, sive cognita, sive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejusdem assumenda est alia, vel ipsam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum est, constituere reperitur, pro diversâ dicti plani signo + vel — affectione. Quo opere ipsa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium casuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ superiùs sunt explicata, haud difficile sit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio sit $yy + 2ay \propto bx - aa$; assumpto, juxta Regulam, $z \propto y + a$, erit $z - a \propto y$. Hinc si ubique in æquatione loco ipsius y substituatur $z - a$, ejusdemque quadratum loco yy: habebitur $zz - 2az + aa, + 2az - 2aa \propto bx - aa$, hoc est, omissis iis quæ sese mutuò tollunt, erit $zz \propto bx$. Unde statim apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur se ab A per rectam AE indefinitè extendere; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF. Deinde, quoniam z est $\propto y + a$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda est infra eam recta GB ipsi AE parallela,

ita ut pars rectæ A F, omniumque ipsi parallelarum, intercepta inter A E & G B, veluti A G, æquetur a cognitæ. Porrò prædicta G B assumenda est ut Parabolæ diameter, ad quam si per ejusdem verticem G, existente G F latere recto, ipsi diametro G B correspondente, $\infty\, b$ Parabola describatur, secans rectam A E in I: dico curvam I D indefinitè versùs D productam esse Locum quæsitum.



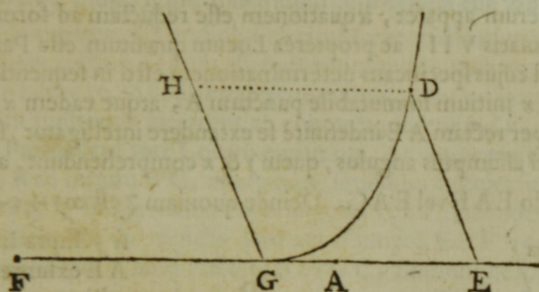
Etenim assumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A F parallelâ, si eadem D E vocetur y, producaturque donec prædictæ diametro G B occurrat in B: erit ex constructione intercepta E B $\infty\, a$, ac proinde tota D B $\infty\, y + a$, hoc est, z. Quare cum ex natura Paraboles quadratum ex D B æquetur rectangulo sub F G & G B, vel F G & A E: erit quoque $zz \infty bx$, sive, restituto $y + a$ loco z, $yy + 2ay + aa \infty bx$, id est, $yy + 2ay \infty bx - aa$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $yy - 2ay \infty bx - aa$, factâ assumptione secundùm Regulam, atque operatione, ut supra; deventum fuisset ad eandem æquationem, nimirum, $zz \infty bx$. Sed quoniam z eo casu juxta Regulam assumenda fuisset $\infty\, y - a$, idcirco quoque diameter G B (iisdem ut supra positis) non infra, sed supra rectam A E cecidisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo expedienda fuissent.

Si verò æquatio sit $by - aa \infty xx + 2ax$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + a$, erit $v - a \infty x$. Quare si loco ipsius x in æquatione substituatur $v - a$, atque hujus

hujus quadratum loco xx: erit $by - aa \infty vv - 2av + aa$, $+ 2av - 2aa$, hoc eſt, omiſſis iis, quæ ſe mutuò tollunt, erit $by \infty vv$.

Unde ſtatim apparet, reductam eſſe æquationem ad formulam prædicti Theorematis ſeptimi converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A,

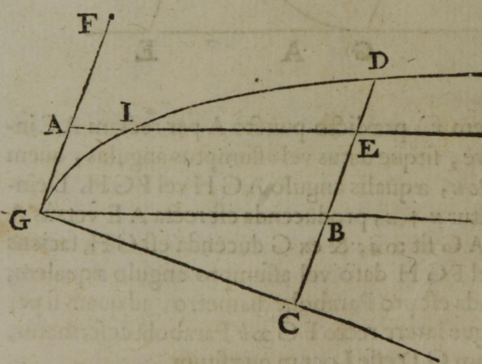


intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam A E indefinitè ſe extendere, ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem comprehendunt y & x, æqualis angulo A G H vel F G H. Deinde, quoniam v æquatur $x + a$, producenda eſt recta A E versùs A uſque ad G, ita ut A G ſit ∞a; & ex G ducenda eſt G H, faciens angulum E G H vel F G H dato vel aſſumpto angulo æqualem, ipſaque G H ſumenda eſt pro Parabolæ diametro, ad quam ſi per ejus verticem G atque latere recto F G ∞b Parabola deſcribatur, ut G D: dico curvam G D eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi H G parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, cum G E ſit $\infty x + a$ ſeu v, atque ex natura Paraboles F G H rectangulum ∞ quadrato ex H D ſive G E, erit $by \infty vv$, ſive, reſtituto $x + a$ loco v, $by \infty xx + 2ax + aa$, ſeu $by - aa \infty xx + 2ax$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Quòd ſi æquatio fuiſſet $by - aa \infty xx - 2ax$, eadem per omnia mutatis mutandis ſecundùm Regulam inſtituenda fuiſſet operatio, cecidiſſetque eo caſu punctum G inter A & E.

Eodem modo si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, assumpto juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$. Quo substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis sequentem formam induta erit superior æquatio: $zz \infty \frac{2bc}{a} x + bx$, aut $zz \infty dx$, si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d. Unde iterum apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF vel EAG. Deinde quoniam z est $\infty y + c + \frac{bx}{a}$,



si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda primùm est infra eandem recta GB ipsi parallela, ita ut partes rectæ F G omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & G B interceptæ, veluti A G, E B, æquentur c cognitæ. Quo peracto, cum quævis recta, quæ possit esse y, ad rectam G B producta, ut, exempli gratiâ, D B, sit $\infty y + c$, oportet ipsi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z assumptæ. Quare, cum G B seu A E indefinitè sumpta sit ∞x, si ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem G B recta ducatur, ut G C; ita ut omnium ipsi G F parallelarum partes inter G B & G C interceptæ, veluti B C, ad partes ipsius G B inter G & dictas parallelas

rallelas interceptas, veluti B G, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a. Quod ipsum ut fiat, statuatur ut a ad b, ita G B ad B C: eritque B C ∞ $\frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipsi B C parallelæ, quæ à G B ad G C ducuntur, erunt ∞ $\frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet supra A E exsurgens, quæ possit esse y, postquam ad rectam G C erit producta, ut, exempli gratiâ, D C, erit ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$ seu z. Hujus igitur quadratum cum debeat esse ∞ dx, statim inde apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum G C, cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula, sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent ∞ dx, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C, aliarumque similium, cognita sit, nempe, ut a ad b; sitque itidem notus angulus G B C, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A F: erit propterea quoque [1] nota ratio G B ad G C, aliarumque similium, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Hinc cum G B seu A E indefinitè sumpta exprimatur per x, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta ∞ $\frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx, idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{ex}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est: ac proinde per eandem divisionem cognoscitur quæsitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo G F ∞ $\frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum G C, ut supra dictum est, describatur Parabola G I D, secans rectam A E in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

[1] per 6 sexti.

Atque hîc, ut & in aliis similibus exemplis obiter notandum, si Parabola descripta prædictam A E non secaret, id certo indicio fore, quæstionem propositam, per quam legitimâ operatione ad supra expressam æquationem perventum fuerit, ejus esse conditionis, ut Locus ad indagandum propositus sui quidem naturâ

linea Parabolica existat; sed quòd nulla tamen quæstioni satisfaciens describi possit, cum propositæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

Ad demonstrationem autem eorum, quæ supra dicta sunt, sumatur in curva I D punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, quæ protracta secet rectam G B in B, occurratque diametro G C in C, si D E vocetur y, cum E B seu A G sit ∞c, & B C $\infty \frac{bx}{a}$, erit tota D C $\infty y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex D C ∞ F G C rectangulo, erit quoque ex antedictis $zz \infty dx$. Ac proinde substitutis aut restitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco z, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, & ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Sin autem æquatio fuisset $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, factâ assumptione secundùm Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuisset; sed quoniam z juxta assumptionem eo casu faciendam fuisset æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque suppositis, ut ante, rectâ G B non infra sed supra rectam A E, ut & G C non infra sed supra eandem G B ducenda fuisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo fuissent expedienda.

Si verò æquatio sit $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} - c$. Unde substituto hoc valore in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, superior æquatio sequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y + by \infty vv$, aut (si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d) $dy \infty vv$. Id quod rursus arguit æquationem propositam reductam esse ad formulam prædicti Theorematis VII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad

Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in ſequenti figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque da-

tus vel aſſumptus angulus E A H vel F A H. Deinde, quoniam ex ſecunda parte Theorematis VII conſtat, prædictam Parabolam ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum ſint ipſi A E parallelæ, debeantque juxta æquationem propoſitam æquales eſſe quantitati aſſumptæ v, hoc eſt, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm eſt recta G B ipſi A H parallela, ita ut pars rectæ E A, versùs A productæ, ut & omnium ipſi æquidiſtantium, velut A G vel H B ſit ∞c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ poſſit eſſe ipſi A E æquidiſtans & æqualis, ac proinde exprimi per x, ut, verbi gratiâ, D H, ad rectam G B producta, uti D B, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, &, ſecundùm ea, quæ in præcedentibus explicata ſunt, conſtituenda eſt Parabolæ diameter ab adverſa parte ipſius G B, quàm eſt punctum E in recta G C, ut, ſi G B indefinitè vocetur y, B C, aliarumque omnium ipſi A E parallelarum inter eandem G C & rectam G B interceptæ partes exprimantur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipſi A E parallela, quæ poſſit eſſe x ad rectam G C producta, veluti D C, fit $\infty x + c + \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Cujus quidem quadratum cum æquale eſſe debeat alteri æquationis termino, nempe, dy: ſtatim apparet, ſi Parabola deſcripta foret ad diametrum G C,

cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent $\infty\, dy$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A H: erit quoque [x] ratio ipsius G B ad G C aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca si G B sive E D indefinitè sumpta exprimatur per y, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty\, \frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy, idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eâdem divisione indicabit quotiens latus rectum quæsitum forè $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ G F $\infty\, \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum G C inventam, ut supra dictum est, describatur sectio Parabolica G I D, secans rectam A H in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

[x] per 6 sexti.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A H, ut & D C ipsi A E parallelâ, quæ quidem D C secet rectas A H & G B in punctis H & B, occurratque diametro G C in puncto C: erit A E $\infty\, x \,\infty$ D H; E D $\infty\, y \,\infty$ G B; A G & H B $\infty\, c$; B C $\infty\, \frac{by}{a}$, ideoque tota D C $\infty\, x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cumque ex natura Parabolæ rectangulum F G C sit æquale quadrato D C: erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in se ipsam, $dy \,\infty\, vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \,\infty\, xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facilè expli-

explicari, determinari, ac demonstrari queant; observatâ solummodo diversâ linearum positione, quæ ex signorum $+$ & $-$ differentia oriri debet, cumque omnes similium locorum casus mox per generalem Regulam sim exhibiturus.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VIII.

Si æquatio sit $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \infty z + \frac{bx}{2a}$. quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, omissisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta: $zz \infty bx + dd$.

Unde apparet, eandem esse reductam ad formulam Theorematis VIII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus particularem descriptionem esto in adjuncta figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A per

per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A E D. Deinde, quoniam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda quoque est supra lineam A E ex puncto A recta A B, ita ut eadem sit ratio A E ad E B, quæ est ipsius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc est, ut sit uti $2a$ ad b, ita A E seu x ad E B, eritque E B $\infty \frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipsi E B parallelis, atque inter A E & A B interceptis, quæ quidem singulæ ipsi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,

quemadmodum ex supra dictis patet, si terminus dd in æquatione deficeret, prædicta A B Parabolæ diameter foret, ejusque vertex punctum A, &, positâ ratione A E ad A B, ut $2a$ ad e, latus rectum ipsi correspondens esset $\infty \frac{2ab}{e}$. Jam verò cum rectangulum, quod sub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale esse debeat $bx + dd$: manifestum est, si, iisdem positis, diameter

A B

A B versùs A producatur ad G, ita ut rectangulum ſub prædicto latere recto & parte G A contentum ſit $\infty\, dd$, rectam G B quæſitam fore diametrum, ejusque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc eſt, per $\frac{2ab}{e}$, diviſum æquari longitudini G A, ideoque G A fore $\infty\, \frac{dde}{2ab}$. Quare ſi diametro G B & latere recto G F $\infty\, \frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola deſcribatur G D d, ſecans A I ipſi E D parallelam in I: dico curvam I D d fore Locum quæſitum.

Verùm obiter hìc quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: ſi nempe E A producatur ad C, ita ut A C ſit $\infty\, \frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipſi D E parallela ducatur C G, occurrens productæ A B in G: erit enim in eodem illo concurſus puncto vertex quæſitus.

Demonſtratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel aſſumpto æquali, ſecante diametrum G B in B: erit, ex conſtructione, B E $\infty\, \frac{bx}{2a}$; ideoque, ſi E D vocetur y, erit D B $\infty\, y - \frac{bx}{2a}$ ſeu z; F G $\infty\, \frac{2ab}{e}$, G A $\infty\, \frac{dde}{2ab}$; A B $\infty\, \frac{ex}{2a}$, totaque G B $\infty\, \frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ D B quadratum ſit æquale rectangulo F G B, erit, factâ multiplicatione ipſius z in ſe ipſam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz \infty\, dd + bx$. Unde ſubſtituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z, obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty\, bx + dd$, id eſt, $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonſtrandum.

Quomodo autem pro caſu hujus exempli converſo Parabola deſcribenda ſit, ex comparatione ejuſdem cum antedictis facile eſt colligere.

Si æquatio fuerit $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty\, xx + \frac{2byx}{a} - cx$, aſſum-

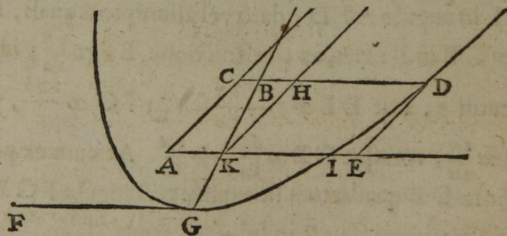
assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$. quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, ablatisque iis, quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta

$$by + \frac{1}{2}cc \infty vv.$$

Unde apparet eandem esse reductam ad formulam prædicti Theorematis VIII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Cujus specifica determinatio (suppositis, ut in adjuncta figura, AE indefinitè assumptam esse quantitatem incognitam x, atque cum altera y constituere angulum æqualem angulo EAC vel ejusdem ad binos rectos supplemento) quoniam ex jam ante explicatis quasi sponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ breviter indicasse suffecerit.

Determinatio Loci.

AE indefinitè ∞x.
ED omnesque ipsi parallelæ ∞y.
AK $\infty \frac{1}{2}c \infty$ CH, quia KH parallela AC.



Ut a ad b, ita KH seu y ad HB: unde HB fit $\infty \frac{by}{a}$, & DB $\infty x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \infty v$.

Ut a ad e, ita KH seu y ad KB: unde KB (in qua diameter) fit $\infty \frac{ey}{a}$.

by divisum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum FG fit $\infty \frac{ab}{e}$.

$\frac{1}{2}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, divisus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{e}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{cce}{2ab}$: unde K G fit $\infty \frac{cce}{2ab}$, atque G B $\infty \frac{cce}{2ab} + \frac{ey}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum F G B ∞ B D quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \infty vv$, vel $by \infty vv - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \infty xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc$
$- \frac{1}{2}cc$.

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \infty z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejus quadrato loco yy, fient æquationis termini, ut sequitur: $zz \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d, supponendo a esse majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quàm ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eâdem breviter annotata sunt, colligere licebit.

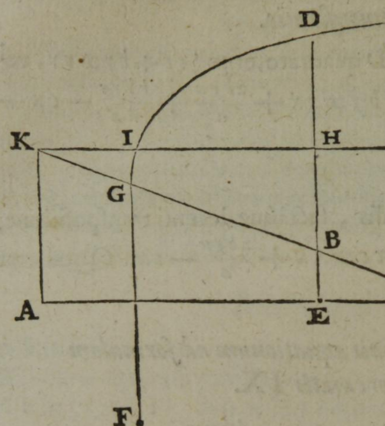
Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.
A E indefinitè ∞x.
E D omnesque ipsi parallelæ ∞y.
E A K vel A E D, angulus quem x & y comprehendere debent.

$AK \infty \frac{1}{2}c$.

KH parallela ipsi AE.

Ut $2a$ ad b, ita KH seu x ad HB: unde HB erit $\infty \frac{bx}{2a}$.



Ut $2a$ ad e, ita KH seu x ad KB: unde KB (in quâ diameter) $\infty \frac{ex}{2a}$.

dx divisum per $\frac{ex}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus rectum, quod sit FG, erit $\infty \frac{2ad}{e}$.

$\frac{3}{4}cc$ divisum per $\frac{2ad}{e}$, reddit $\frac{3cce}{8ad}$: unde KG sit $\infty \frac{3cce}{8ad}$, atque GB $\infty \frac{ex}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc si GB diametro & latere recto FG per verticem G descripta sit Parabola, secans KH in I, erit ID Locus quæsitus.

Demonstratio.

Esto punctum D utcunque sumptum in ID, & DE ducta parallela ipsi AK, quæ si vocetur y; erit HD $\infty y - \frac{1}{2}c$, ac DB $\infty y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc est, z. Cujus quadratum cum æquetur rectangulo FGB, erit $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$, hoc est, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, si utrinque demantur æquales, terminique ritè transponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propositum.

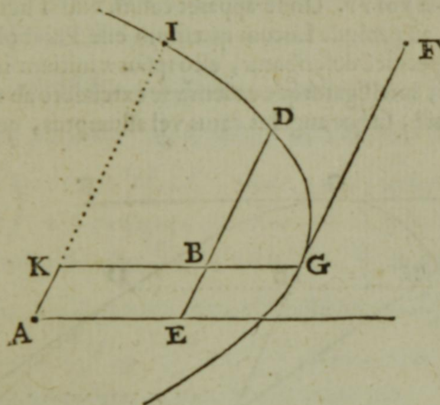
Atque hujus quidem exempli conversum, ut & cæteros casus huc spectantes, ex iis, quæ jam dicta sunt, simili modo reducere atque resolvere non difficile erit.

Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis X.

Si æquatio sit $ay - yy \infty bx$, sive, quod idem est, $yy - ay + bx \infty 0$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{1}{2}a$, erit $y \infty z + \frac{1}{2}a$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, remanebit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$. Unde apparet, eandem esse reductam ad casum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem sunt demonstrata, Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, eademque x se indefinite ab A versùs E extendere intelligatur; sit autem datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K,



aut ipsius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z assumpta est $\infty y - \frac{1}{2}a$, si y supra rectam A E exurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta K G ipsi A E parallela; ita ut A K omnesque ipsi æquidistantes inter A E & K G interceptæ sint $\infty \frac{1}{2}a$. Quo facto, si juxta Regulam fiat K G $\infty \frac{aa}{4b}$, eademque sumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K parallelæ, cujusque latus rectum F G sit ∞b: erit ipsius portio descripta G D I, quæ inter verticem G & productam A K intercipitur, Locus quæsitus.

Etenim assumpto in curva G D I puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, quæ secet diametrum K G in B, si eadem D E vocetur y: erit D B $\infty\, y - \frac{1}{2} a$ seu z, ac G B sive G K — K B $\infty\, \frac{aa}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Paraboles quadratum ex B D sit æquale rectangulo F G B, erit $zz \infty \frac{1}{4} aa - bx$, hoc est, $yy - ay + \frac{1}{4} aa \infty \frac{1}{4} aa - bx$, sive $yy - ay + bx \infty 0$, sive etiam $ay - yy \infty bx$. Quod erat propositum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$, sive, quod idem est, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty 0$: assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$. Quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \infty vv$. Unde apparet casum esse Theorematis X conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Quæ quidem ut specificè describatur, esto ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x se extendere ab A versùs E indeterminatè, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A H aut ipsius ad duos rectos complemento. Deinde sumatur in A H recta A C $\infty\, \frac{cc}{d}$, ducaturque ex C recta C F ipsi A E parallela, atque in eadem sumptâ C G, quæ se habeat ad C A, ut cognita b ad a cognitam, hoc est, ut sit uti a ad b, ita A C ad C G, agatur A G, eaque pro diametro Parabolæ sumatur, quæ per verticem G versùs A erit describenda. Porrò cum in triangulo A C G ob rationem cognitam laterum

A C,

A C, C G, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel assumpto aut ejusdem ad duos rectos supplemento æqualem, cognita item sit ratio, quam habet A C ad A G, quæ sit ut a ad e; erit, A C existente $\infty \frac{cc}{d}$, A G $\infty \frac{cce}{ad}$. Per quam si terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum cc, dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde si fiat G F $\infty \frac{ad}{e}$, erit G F latus rectum quæsitæ Parabolæ, diametro G A correspondens; atque iccirco si ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola describatur, ut G D I, secans A E in I: dico I D G curvam esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductisque D E ipsi A H, ac D B H ipsi A E parallelis, si eadem D E exprimatur per y, erit quoque A H ∞y. Cumque sit ut A C ad C G, id est, ut a ad b, ita A H ad H B: erit H B $\infty \frac{by}{a}$, ideoque cum D H seu A E sit ∞x, erit D B $\infty x - \frac{by}{a}$ seu v. Similiter cum sit ut A C ad A G, hoc est, ut a ad e, ita A H seu y ad A B: erit A B $\infty \frac{ey}{a}$, & G A — A B seu G B $\infty \frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum F G B sit æquale quadrato ex B D, erit, factâ multiplicatione ipsius F G seu $\frac{ad}{e}$ in G B seu $\frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipsius B D seu v in se ipsam, $cc - dy \infty vv$. Hoc est, restituto $x - \frac{by}{a}$ loco v, erit $cc - dy \infty xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Obiter autem & hic notandum, ut ex antedictis quoque facile est colligere, aliter etiam diametrum G A atque latus rectum G F indagari potuisse, hoc modo:

Cum A H indeterminatè sit ∞y, juxta primum Theorema hujus ita ducatur A G, ut recta H B, quemadmodum & quælibet alia ipsi A E parallela, quæ inter A H & A G intercipitur, sit $\infty \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ est inter A H & A B similesque, ut a ad e: ideoque cum A B indeterminatè sit $\infty \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per

per eandem divisus ostendet latus rectum sectionis FG $\infty \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum seu $\frac{ad}{e}$ divisus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quæsita AG.

Plura hîc exempla subjungere supervacuum foret, cum mox omnes omnino casus possibiles generali regulâ annotare ac demonstrare animus sit.

Porrò quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis seu casibus in hypothesi non illustraverimus, neque etiam id aut hîc aut in sequentibus ullo modo necessarium ducamus, quippe cum unusquisque, qui Regulas ipsas rectè perceperit, easdem quibuslibet propositis exemplis seu casibus in hypothesi facilè applicare valeat; quandoquidem tamen libro primo insignes quasdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipsis consultò prætermisimus, eâ mente, ut in hoc libro suis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonstrari, simulque tanquam propositarum Regularum particularia exempla haberi possent, earundem explicationem hîc & sub finem sequentis capitis subjiciemus.

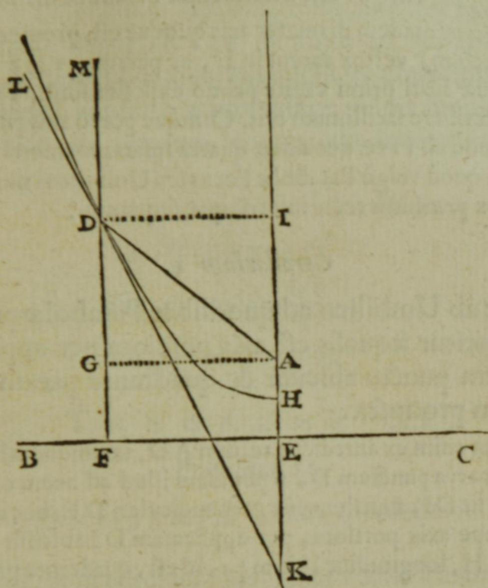
PROBLEMA I.

Propositio 11.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, sibi invicem sint æquales: & quoniam infinita sunt ejusmodi puncta, quæ quæstioni satisfaciunt, Locum determinare ac describere, in quo cuncta & singula reperiantur.

Sit datum punctum A, & data positione recta linea BC, oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ D A, D F, quarum hæc ad datam B C intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ductâ perpendiculari A E, quæ vocetur a, ac suppositis juxta Regulam binis lineis E F, F D incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum E F D comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior E F vocetur x, ac posterior F D nominetur y; si ducta præterea intelligatur A G ipsi E F æquidistans, erit in triangulo rectangulo A G D basis A D ∞ y, utpote ∞ ductæ D F; latus verò A G seu recta E F ∞ x, & G D, sive (si punctum G cadat inter D & F) F D — A E, aut (si punctum D inter F & G cadat) A E — F D ∞ $y = a$. Unde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit yy ∞ $xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruunt, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa$ ∞ xx. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversim, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta

 ea,

ea, quæ ibidem exposita sunt, ex E ducatur recta E I indefinitè extensa atque ipsi F D æquidistans; & ab eadem auferatur recta E H $\infty \frac{aa}{2a}$, id est, $\frac{1}{2}a$: erit describendæ Parabolæ diameter in dicta E I, (quæ quidem diameter axis quoque est, propter angulum E F D rectum) vertex autem in H, ac parameter ∞ 2 a. Unde, per ea quæ libri primi capite primo exposita sunt, Parabolam ipsam describere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice distat quartâ ipsius parametri parte, id ipsum sit, quod vulgò Parabolæ Focus seu Umbilicus nuncupatur, apparet ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Umbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur æqualis est axis portioni per applicatam ab eodem puncto abscissæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Constat enim ex antedictis rectam A D, utcunque assumptum fuerit in curva punctum D, si per idem illud ad axem ordinatim applicata sit D I, æqualem esse perpendiculari D F, hoc est, rectæ I E, nempe axis portioni, per applicatam D I abscissæ, & per verticem H, longitudine H E $\infty \frac{1}{2}a$, id est, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifestum quoque est ex antedictis, si positis quæ supra, & productâ F D, uti ad M, per assumptum punctum D contingens ducta sit, ut L D K, angulum F D K sive M D L angulo A D K æqualem esse.

Occurrat enim contingens L D K axi producto in K, eritque [1] recta I H ipsi H K, ideoque (æqualibus H E, A H utrinque additis) recta I E, hoc est, A D, ipsi A K æqualis; ac proinde [2] & angulus A D K angulo A K D, hoc est, angulo F D K sive M D L æqualis sit necesse est.

[1] *per 1 Cor. 2 primi hujus.*
[2] *per 5 primi.*

CAPUT III.

Tertio autem casu supra expresso, cùm nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum deventum erit;

I. $yx \propto ff$.

II. $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$.

III. $yy - ff \propto \frac{lxx}{g}$.

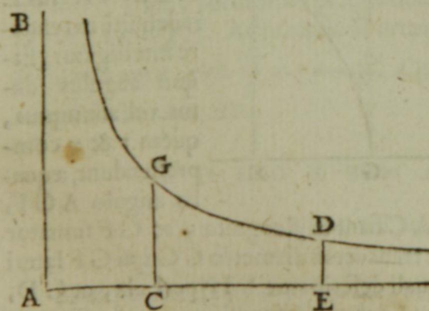
IV. $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx$.

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \propto ff$, Locus quæsitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAB, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in AE recta AC $\propto f$, ducaturque CG eidem æqualis ac ipsi AB parallela, descriptâque [1] per punctum G atque



[1] per ea quæ in Corol. ad 11 & 12, nec non cap. ult. lib. primi hujus tradita sunt.

que Asymptotis AE, AB Hyperbolâ GD: dico curvam GD esse Locum quæsitum.

Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AB parallelâ, erit ex natura Hyperboles [1] rectangulum AED rectangulo ACG, hoc est, quadrato ex AC æquale. Hinc, cum AE sit assumpta pro incognita quantitate x, si ED vocetur y, erit $yx \infty ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

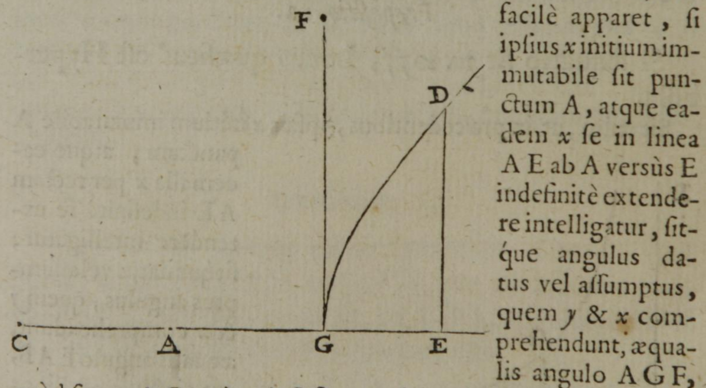
[1] *per 3 primi hujus.*

THEOREMA XII.

Propositio 13.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$, erit Locus quæsitus linea Hyperbolica.

Aut enim l ipsi g æqualis est aut inæqualis, & si æqualis sit, erit superior æquatio eadem ac si esset $yy \infty xx - ff$ (quod semel monuisse sufficiat). Ac facilè apparet, si ipsius x initium immutabile sit punctum A, atque eadem x se in linea AE ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF, quòd si tam AG quàm AC fiant ∞f cognitæ, ac GF sumatur ∞ GC, centroque A, & transversâ diametro CG ipsi GF lateri recto sive parametro æquali describatur [2] Hyperbola, ut GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.



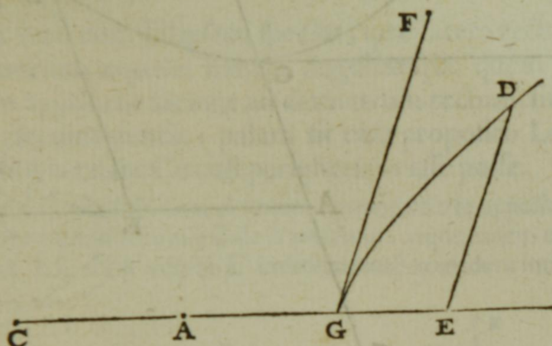
Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductaque DE ipsi FG parallelâ, erit [3] ex natura Hyperboles, cùm CG & GF supponantur æquales, quadratum ex DE æquale rectangulo CEG.

[2] *per ea quæ cap. ult. primi hujus ostensa sunt.*

[3] *per 10 primi hujus.*

CEG. Hinc, si DE vocetur y, cum ex hypothesi CE seu AE + AC sit ∞ $x+f$, & GE sive AE — AG ∞ $x-f$, erit $yy \infty xx-ff$.

At verò si l & g sint inæquales, apparet esse, ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy. Ac proinde si juxta ea, quæ supra exposita sunt, non jam parameter GF diametro transversæ CG æqualis, sed ut l ad g,



ita fiat transversa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut supra, eodem modo quæsito erit satisfactum.

Est enim [1] ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum, hoc est, ut g ad l, ita yy ad $xx-ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy \infty gxx-gff$. Ac proinde si utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g, erit $\frac{lyy}{g} \infty xx-ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat. [1] *per 10 primi hujus.*

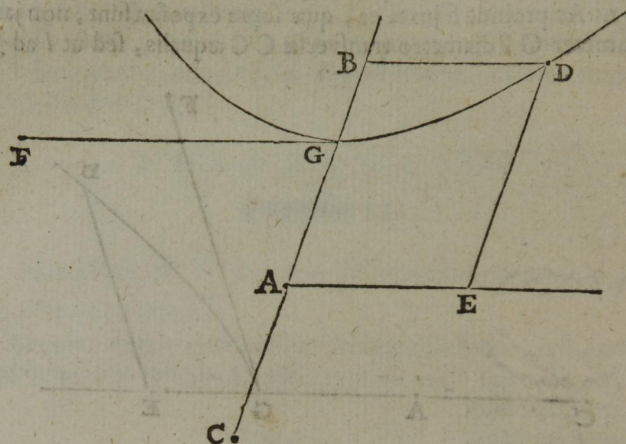
Theorema XIII.

Propositio 14.

Si æquatio sit $yy-ff \infty \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæsitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem specificam esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, ipsaque x se ab A versùs

E in linea A E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo E A G aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Deinde, cum ſit ut l ad g, ita $yy - ff$



ad xx, ſtatim apparet, ſi tam A G quam A C ſumantur æquales f cognitæ, fiatque ut l ad g, ita C G ad G F (quæ quidem G F ſit ipſi A E parallela), ac poſtea centro A, tranſverſâ diametro C G, & parametro G F Hyperbola deſcribatur G D, eandem curvam G D fore Locum quæſitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A G, ac D B ipſi A E parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, erit C B, hoc eſt, D E + A C, $\infty y + f$; & B G, ſive D E — A G, $\infty y - f$, ideoque C B G rectangulum $\infty yy - ff$. Dein cum [1] ex natura Hyperbolæ ſit ut C G ad G F, hoc eſt, ex hypotheſi ut l ad g, ita rectangulum C B G ad D B ſive A E quadratum, id eſt, ita $yy - ff$ ad xx: erit $gyy - gff \infty lxx$, hoc eſt, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$. Quod demonſtrandum, determinandumque erat.

[1] per 10 primi hujus.

THEO-

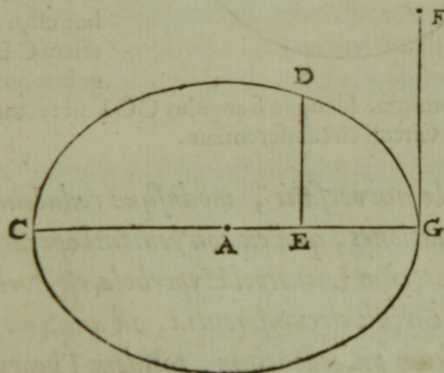
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g}$ ∞ $ff - xx$, erit Locus quæsitus Ellipsis.

At verò cum Ellipseos species, quæ latera rectum & transversum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, sit Circuli circumferentia: palam fit casu proposito Locum quæsitum etiam Circuli peripheriam esse posse.

Hinc ad prædicti Loci determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se per lineam AE ab A versùs E indeterminatè extendere intelliga-



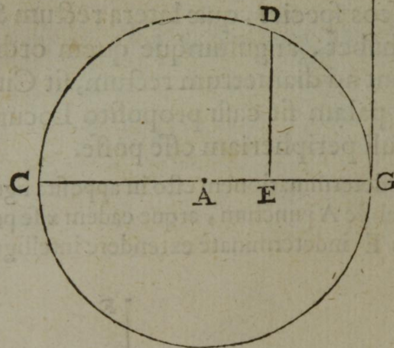
tur, sitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF. Porrò cum sit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy: facilè apparet, si tam AG quàm AC sumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g, ita CG ad GF, ac centro A, transversâ diametro CG, & parametro GF [1] Ellipsis describatur GDC, eandem curvam GDC fore Locum quæsitum.

Sum-

[1] *per 7 Corol. 13 & 1 Cor. 14 primi hujus, ut & per ea quæ circa finem cap. 4 ejusdem lib. tradita sunt.*

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi FG parallelâ, erit [1] ex natura Ellipseos ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum. Hoc est, si ED vocetur y, cum CE sit $\infty f + x$, & EG $\infty f - x$, erit ut g ad l, ita yy ad $ff - xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod erat propositum.

[1] *per 13 primi hujus.*



Cæterùm liquidò constat, si CG & GF æquales fuerint, hoc est, si $l \infty g$, quòd etiam CEG rectangulum quadrato ED æquale sit futurum. Ideoque si angulus CGF sit rectus, curvam GDC fore Circuli circumferentiam.

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione existunt, cùm Locus vel Hyperbola est, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor casuum præcedentium, totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat, ut quantitatum incognitarum non modò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utraque in se ducta, sed & vel hæc, vel illa, vel utraque unius præterea dimensionis in æquatione reperiatur, constituens planum cum alia, sive cognitâ sive incognitâ,

tâ, ſive etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate: oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, aſſumere alias vel aliam, quæ ipſas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cujus locum nova non eſt aſſumpta, planum conſtituere reperitur, ſi nempe incognitarum neútra in ſe ipſam in æquatione ducta ſit; ſin ſecus, dimidio tantùm ejus quantitatis, quæ planum conſtituit cum incognita, in cujus locum aſſumptio facta eſt, caſu utroque juxta differentem affectionem per ſigna + vel —, quæ præfiguntur iiſdem illis quantitatibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reïterato, ubi opùs, ſi ad formulas Parabolarum, capite ſecundo expoſitas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor ſuprapoſitorum caſuum reducta erit æquatio, ac proinde ipſi convenientem Locum determinare ac deſcribere, per ea quæ ſuperiùs explicata ſunt, haud difficile erit.

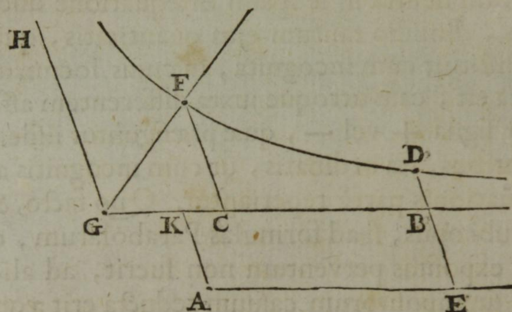
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XI.

Si æquatio fuerit $yx - cx + by \infty ee$: aſſumpto $z \infty y - c$, & $v \infty x + b$, erit $z + c \infty y$, & $v - b \infty x$.

Unde ſi ſecundùm Regulam ubique in æquatione loco y ſubſtituatur $z + c$, erit $zx + cx - cx + bz + bc \infty ee$, ſive $zx + bz + bc \infty ee$; ac rurſus ſi loco ipſius x ſubrogetur $v - b$, erit $zv - bz + bz + bc \infty ee$, id eſt, $zv \infty ee - bc$. aut, (ſi loco termini $ee - bc$, qui in totum cognitus eſt, ſcribatur ff) $zv \infty ff$. Et apparet æquationem reductam eſſe ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæſitum eſſe Hyperbolam.

Ad cujus ſpecificam determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura initium ipſius x immutabile punctum A, atque eadem x per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K

aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Deinde, quoniam z eſt $\infty\, y - c$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere concipiatur, ducenda quoque eſt ſupra eandem recta K B ipſi A E parallela; ita ut pars rectæ A K, omniumque ipſi æquidiſtantium, inter A E & K B intercepta, veluti A K, æquetur c cognitæ. Porrò, quoniam v eſt $\infty\, x + h$, producenda eſt ipſa B K per K uſque ad G, ita ut K G ſit



$\infty\, h$. Quo facto, erit G centrum ipſius curvæ, & G B una Aſymptotωn, eritque altera ipſi A K parallela, ut G H. Unde ſi juxta Regulam prædicti Theorematis XI in recta G B ſumatur G C æqualis f cognitæ, ducaturque C F eidem G C æqualis, ac parallela rectæ A K vel G H, atque per punctum F, Aſymptotis G B & G H, ſive Aſymptoto G B atque ad axem G F, Hyperbola deſcribatur F D: dico curvam F D fore Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E. ipſi A K parallelâ, quæ ſecet rectam K B in B, ſi eadem D E vocetur y, erit D B ſive D E — E B $\infty\, y - c$, id eſt, z. Eſt autem & G B ſive A E + G K $\infty\, x + h$, hoc eſt, v. Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum G B D æquetur G C quadrato, erit quoque $zv \infty ff$. aut reſtitutis $y - c$ loco ipſius z, & $x + h$ in locum ipſius v, atque $ee - ch$ loco ff, erit $yx - cx + hy - ch \infty ee - ch$, hoc eſt, $yx - cx + hy \infty ee$. Quod erat propoſitum.

Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis XII & XIII.

Si æquatio ſit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$, aſſumpto $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$, eoque ſubſtituto in locum ipſius y, atque ejuſdem quadrato loco yy, ſublatiſque iis, quæ ſe invicem deſtruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Et factâ congruâ tranſpoſitione, $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$, hoc eſt, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviſo per $fa + bb$; ut quantitas xx abſque fractione remaneat, fiet $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{aaex + 2abcx}{fa + bb} + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$.

Deinde aſſumpto $v \infty x + \frac{aae + 2abc}{2fa + 2bb}$, ut terminus quoque æquationis, in quo x unius dimenſionis reperitur, planè evaneſcat, habebitur $x \infty v \frac{-aae - 2abc}{2fa + 2bb}$. Quo ſubſtituto in locum ipſius x, atque ejuſdem quadrato loco xx, ablatiſque iis quæ ſe invicem tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requiſitam. At verò ut vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae + 2abc}{fa + bb}$ ſcribatur $2h$, ita ut fiat æquatio $\frac{aazz}{fa + bb} \infty xx + 2hx \frac{+ aadd + aacc}{fa + bb}$. Tum aſſumpto $v \infty x + h$ ſeu $x \infty v - h$, eoque ſubſtituto loco x in æquatione, ac ejuſdem quadrato loco xx: erit $\frac{aazz}{fa + bb} \infty vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Unde apparet, ante omnia hîc eſſe conſiderandum, utrum hh ſit majus quàm $\frac{aadd + aacc}{fa + bb}$, an contra. ſi enim majus ſit, erit caſus Theorematis XII; ſin contra, erit caſus Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æquatio formulæ Theorematis XII. Et conſtat exinde Locum quæſitum Hyperbolam eſſe.

Ad cujus peculiarem determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea AE ab A versùs E indefinitè ſe extendere intelligatur; ſitque angulus

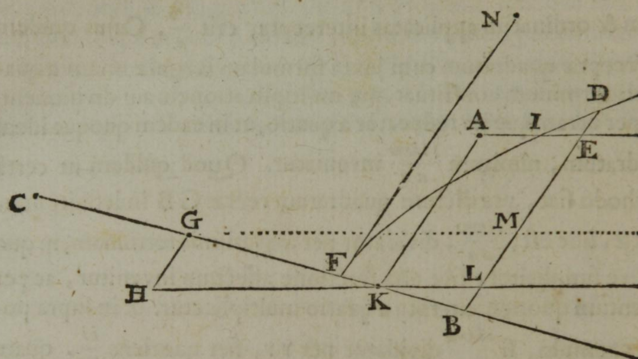
quem x & y comprehendunt æqualis angulo E A K aut ipsius ad duos rectos supplemento. Porrò quoniam $z \infty y + c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, ut E D, ducenda primùm est infra eandem A E recta K L ipsi A E parallela; ita ut pars rectæ A K omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K, E L, &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ L K usque ad H, ita ut K H sit ∞ b, ideoque H L indefinitè sumpta ∞ $x + b$, hoc est, v, ducatur per H punctum recta H G ipsi A K parallela, ita ut K H ad H G sit, ut a ad b. Quo facto, si per puncta G & K recta agatur linea G K B, habebunt omnium ipsi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B intercipiuntur (ut, exempli gratiâ, L B), ad partes ipsius K L, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, L K) eandem rationem, quæ est inter b & a: hoc est, erit ut a ad b, ita K L ad L B, cum utraque sit ut K H ad H G. Ideoque cum K L sive A E indefinitè sumpta sit ∞ x, erit L B, ut & quælibet ipsi parallela, inter K L & K B intercepta, $\infty \frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea supra A E rectam exsurgens, quæ possit esse y incognita, ad rectam K B producta, veluti D B sive D E + E L + L B erit ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Unde apparet, juxta Regulam lineam G B sumendam esse pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K seu D B parallelæ: eritque ejusdem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad i. Quare cum GM seu HL indefinitè sit v, GB quoque indefinitè concepta, hoc est, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in supra posito exemplo, si $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv, fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda est per ii, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Unde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa}\ \frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut secet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y, erit ex ante dictis DB ∞ z. Est autem, ut jam annotatum, GB ∞ $\frac{iv}{a}$, atque ex hypothesi GF seu GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa}\ \frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, ideoque BC ∞ $\frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb}{aa}\ \frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, ac BF ∞ $\frac{iv}{a} -$

 $\sqrt{\frac{iibb}{aa}}$

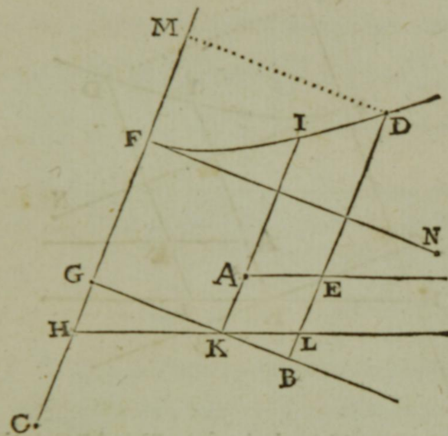
$\sqrt{\frac{iihh}{aa} - \frac{iidd - iicc}{fa + bb}}$, & rectangulum CBF $\infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa + bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles NF ad FC, seu $fa + bb$ ad ii sit, ut DB quadratum, hoc est, zz, ad prædictum rectangulum CBF: erit $\frac{iizz}{fa + bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa + bb}$.



Multiplicetur jam utrinque per aa, & dividatur per ii, eritque $\frac{aazz}{fa + bb} \infty vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Dein restituto $x + h$ loco v, exurget $\frac{aazz}{fa + bb} \infty xx + 2hx + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$; itemque $\frac{eaa + 2bca}{fa + bb}$ loco $2h$, exurget $\frac{aazz}{fa + bb} \infty xx + \frac{eaax + 2bcax}{fa + bb} + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Porrò multiplicatis omnibus per $fa + bb$ iisque divisis per aa, habebitur $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò hh minus quàm $\frac{ddaa + ccaa}{fa + bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iizz}{fa + bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{ddii + ccii}{fa + bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem terminis per $fa + bb$, ac producto diviso

divifo per ii, factâque decenti tranfpofitione, eadem cum fequenti $zz - dd - cc + \frac{fabb + bbbb}{aa} \infty \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac divif. per ii, id eft, $\infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæfitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus fpecificam determinationem & defcriptionem, poftquam ut in præcedenti figura ductæ funt lineæ A E, A K, K L, KH, H G, & G K B: erit quidem, ut fupra, G centrum, at verò non erit diameter in linea G K, fed, juxta Regulam, in linea H G producta

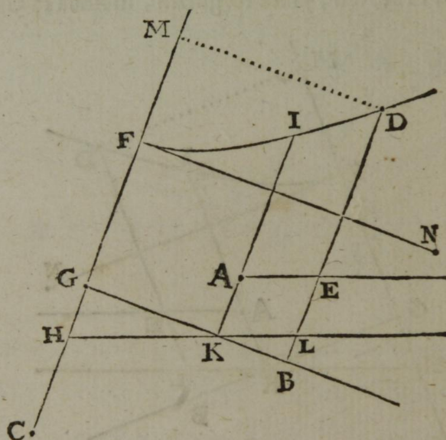


ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ fint ipfi G K B parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium tranfverfæ diametri, nempe G F vel G C, æquale $\sqrt{dd + cc - \frac{fabb - bbbb}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii. Quare fi fiat, ut $fa + bb$ ad ii, ita C F ad F N, quæ quidem F N ipfi G K B æquidiftans fit, erit F N parameter: ac proinde fi centro G tranfversâ diametro C F & parametro F N Hyperbola defcribatur F D, fecans ipfam A E vel K A productam in I, erit I D curva Locus quæfitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D B ipfi A K (five G F), & D M ipfi G B parallelâ, fi

E D

ED vocetur y, erit, ut supra, DB sive MG $\infty\ z$, & BG sive DM $\infty\ \frac{iv}{a}$. Cumque sit GF vel GC $\infty\ \sqrt{dd + cc\frac{-fahh - bbbh}{aa}}$, erit CM $\infty\ z + \sqrt{dd + cc\frac{-fahh - bbbh}{aa}}$, & MF $\infty\ z - \sqrt{dd + cc\frac{-fahh - bbbh}{aa}}$, ac propterea rectangulum CMF $\infty\ zz - dd - cc\frac{+fahh + bbbh}{aa}$. Est autem DM quadratum $\infty\ \frac{iivv}{aa}$.



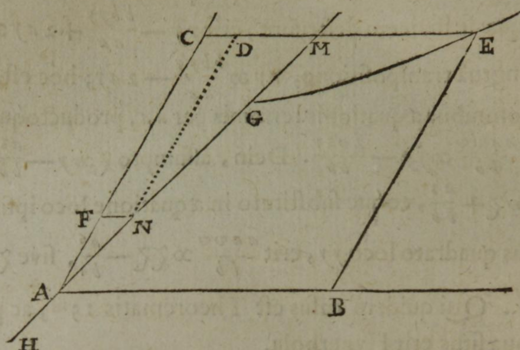
Quare cum ex natura Hyperboles sit ut FN ad FC, ita DM quadratum ad CMF rectangulum, hoc est, ut ii ad $fa + bb$, ita $\frac{iivv}{aa}$ ad $zz - dd - cc\frac{+fahh + bbbh}{aa}$: erit quoque $zz - dd - cc\frac{+fahh + bbbh}{aa}\ \infty\ \frac{favv + bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per $fa + bb$, factâque transpositione cogniti termini, erit $\frac{aazz}{fa + bb}\ \infty\ vv - hh\frac{+ddaa + ccaa}{fa + bb}$. Dein restitutis $x + h$ loco v, $\frac{eaa + 2bca}{fa + bb}$ loco $2h$, atque $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy\ \infty\ \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Si

Si æquatio ſit $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \infty 0$. Aſſumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$, eoque ſubſtituto in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, ſublatiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \infty 0$. &, factâ congruâ tranſpoſitione, $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc eſt, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviſo per bb, $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, aſſumpto $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \infty z + \frac{a^3}{bb}$, eoque ſubſtituto in æquatione loco ipſius y, atque ipſius quadrato loco yy, erit $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$, ſive $zz - \frac{a^6}{b^4} \infty \frac{aavv}{bb}$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 13tii, ac proinde Locus quæſitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A B ab A versùs B indefinitè ſeſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo A B E. Deinde, quoniam ex antedictis facilè colligitur Hyperbolam hoc caſu & ſimilibus ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ ſint ipſi A B æquidiſtantes, ductâ rectâ A C ipſi B E parallelâ, quoniam $v \infty x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò eſt recta A M; ita ut omnium ipſi A B parallelarum partes, inter A C & A M interceptæ, veluti C M, ad partes ipſius A C inter A & dictas parallelas interceptas, veluti A C, eandem rationem habeant, quæ eſt inter b & a; hoc eſt, ut ſit quemadmodum a ad b, ita A C ad C M. Unde ſi A C ſeu B E indefinitè ſumpta vocetur y, erit C M & ſimiles $\infty \frac{by}{a}$, ac deſcribendæ Hyperboles diameter in dicta A M. Porrò, quoniam $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, ſi ab A C auferatur A F $\infty \frac{a^3}{bb}$: erit F C indefinitè ſumpta ∞z, &, ductâ F N ipſi A B parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ N D ipſi F C æquidiſtantis & æqualis ad rectam D M aliarumque ſimilium ſit cognita, nempe ut a ad b, ſitque itidem notus angulus

NDM, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto angulo ABE, erit quoque ratio ND ad NM aliarumque similium nota, quæ sit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum ND seu FC indefinitè sumpta exprimatur per z, erit NM itidem indefinitè sumpta $\infty \frac{ez}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituere debeat, multiplicanda est suprascripta æquatio per ee, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4} \infty \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, si juxta Regulam semi-latus transversum fiat NG vel NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut ee ad bb; iisdemque lateribus ac diametro & centro jam inventis Hyperbole describatur GE: dico curvam GE esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque EB in angulo ABE, dato vel assumpto æquali, nec non EC ipsi AB parallelâ, secante diametrum AM in M; si eadem EB, hoc est, AC, vocetur y, erit, ut supra, CM $\infty \frac{by}{a}$, ac proinde ME, sive AB — CM, $\infty x - \frac{by}{a}$, hoc est, v. Est autem, ut superiùs annotatum, NM $\infty \frac{ez}{a}$, atque ex hypothesi NG seu NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ideoque HM $\infty \frac{ez}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & MG $\infty \frac{ez}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectangulum

gulum HMG $\infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$: hinc cum ex natura Hyperboles ſit ut latus rectum ad tranſverſum, ſive ut bb ad ee, ita ME quadratum, id eſt, vv, ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb} \infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$, &, multiplicatis omnibus terminis per aa, factoque per ee diviſo, $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$. Dein reſtituto $y - \frac{a^3}{bb}$ in locum ipſius z, exurget $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb, factoque diviſo per aa, habebitur $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique reſtituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipſius v, expunctisque iis quæ ſe invicem deſtruunt, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propoſitum.

PROBLEMA II.

Propoſitio 16.

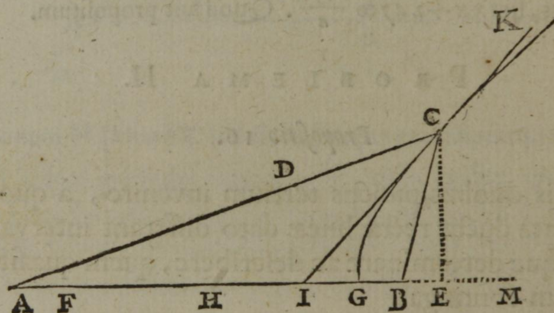
Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac deſcribere, quem quæſitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG ſeu AD.

Quoniam in quæſtione angulus datus non eſt, quò facilior ſit operatio, aſſumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, ſi opùs fuerit, intelligatur demiſſa perpendicularis, ut CE; tum, ſuppoſitis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, aſſumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac poſterior, nempe EC, nominetur y, ipſa autem AB, ſeu datorum punctorum cognita diſtantia, vocetur a, & data FG ſive AD exprimatur per b. Hinc cum BE ſive (ſi punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (ſi punctum E inter A & B cadat) AB — AE ſit

$\infty\, x = a$, & A C $\infty \sqrt{xx+yy}$, at B C $\infty \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$; ſitque A C — A D ∞ B C: æquatio erit
$\sqrt{xx+yy} - b \infty \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à ſigno radicali liberetur, & tranſpoſitis tranſponendis, erit
$4bbyy \infty 4aaxx - 4bbxx - 4a^3x + 4bbax + a^4 - 2bbaa + a^4$.
Unde factâ diviſione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty xx - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde aſſumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, ideoque ſubſtituto hoc valore in locum ipſius x, atque ejuſdem quadrato loco xx, expunctiſque iis quæ ſe invi-

Fig. 1.



cem deſtruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 12mi hujus libri, ac proinde Locus quæſitus erit Hyperbola. Cumque v aſſumpta ſit pro $x - \frac{1}{2}a$, ſi ab A versùs E ſumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & ſemidiameter tranſverſa (puta H G ab una, & H F ab altera parte,) $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id eſt, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter tranſverſa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad diametrum H E perpendicularem, tranſverſus quoque axis eſt,) ſit $\infty\, b$. Ratio autem tranſverſæ diametri ad parametrum, ſeu quadrati tranſverſæ ad quadratum ſecundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Unde per ea quæ libri primi capitibus ſecundo & ultimo expoſita ſunt Hyperbolam ipſam deſcribere haud difficile erit. Porrò cum quadratum ſemidiame-

diametri transversæ sit ∞ $\frac{1}{4} bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri ∞ $\frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$. Atqui cum FB sive BH + HF sit ∞ $\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$, & BG sive BH — HG ∞ $\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$, erit quoque rectangulum FBG ∞ $\frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$, nempe ∞ quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò oppositarum Hyperbolarum Foci sive Umbilici nuncupantur. Unde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Si ab assumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine transversi axis superabit.

Etiamsi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino constet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribusvè, quòd sciam, non nisi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hactenus demonstratum sit: id ipsum hîc demonstratione unicâ, & quidem breviore satisque simplici, aliter ostendisse non inutile fortè judicabitur.

Esto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, transversus axis FG, atque Umbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF semi-secundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab assumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque [1] AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Unde cum sit [2], ut

HF*q* ad GAF, ita FEG ad CE*q*: erit quoque, per compos. rationis contrariam, ut

HF*q* ad (HF*q* + GAF, id est [3], ad) HA*q*; ita FEG ad FEG + CE*q*; adeoque [4] ut

HF*q* ad HA*q*, ita (HF*q* + FEG sive [5]) HE*q* ad HA*q* + FEG + CE*q*. Est autem quoque [6], ut

HF*q* ad HA*q*, ita HE*q* ad HM*q*. Quocirca [7]

HM*q* ∞ HA*q* + FEG + CE*q*; hoc est, addito utrinque HF*q* seu HG*q*, erit

[1] *per 16 sexti.*
[2] *ex hypoth. & per 10 primi hujus.*
[3] *per 6 secundi.*
[4] cum sit ut una antecedentium ad unam conseq., ita omnes antecedentes ad omnes conseq. *per 12 quinti.*
[5] *per 6 secundi.*
[6] *ex constructione & per 22 sexti.*
[7] *per 9 & 11 quinti.*

[1] per 6 secundi.

$$HMq + \left\{\begin{matrix} HFq \\ \text{seu} \\ HGq \end{matrix}\right. \infty \left\{\begin{matrix} HAq \\ \text{seu} \\ HBq \end{matrix}\right. + (HFq + FEG, \text{i.e.}^{1})\, HEq, + CEq.$$

Hinc additis vel sublatis ab utraque æquationis parte æqualibus,

$$\text{nimirum} \left\{\begin{matrix} FHM \\ \text{seu} \\ GHM \end{matrix}\right. \text{bis ab una, \&} \left\{\begin{matrix} AHE \\ \text{seu} \\ BHE \end{matrix}\right. \text{bis ab altera parte: erit}^{2}$$

[2] per 4 secundi. [3] per 47 primi. [4] per 7 secundi. [5] per 47 primi.

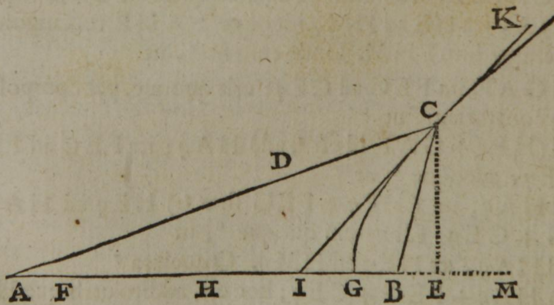
$FMq \infty (AEq + CEq$, id est [3]) ACq; itemque [4] $GMq \infty (BEq + CEq$, id est [5]) BCq. Cumque propterea FM sit ∞AC; & $GM \infty BC$; sitque ipsarum FM & GM differentia FG, manifestum est ipsarum quoque AC & BC majorem superare minorem, ejusdem FG, nempe axis transversi, longitudine. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Umbilicum rectis, quæ angulum iis comprehensum bifariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & conversim.

Si enim quæ angulum ACB bifariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, secet eandem, si fieri potest,

Fig. 1.

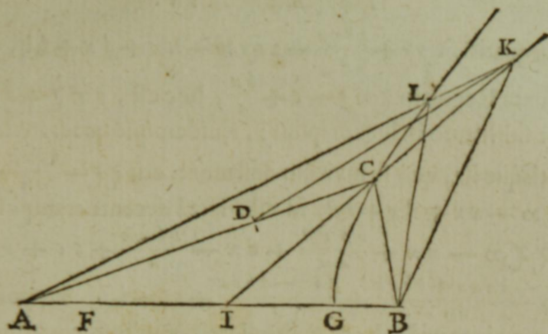


atque ita saltem aliquo sui puncto, veluti K, intra Hyperbolam sit.

Tum

Tum ductis KB, KD, & KA (quarum posterior Hyperbolam secet in L, à quo ad B ducta sit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

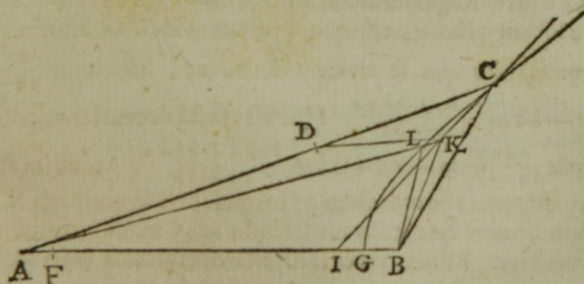
Fig. II.



circa [1] æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis DK basi BK æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens, AL ipsam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, simul sumptas, superet intervallo AD; sitque BK, ideoque & KD, ipsis BL, LK simul sumptis minor: per consequens AK eandem KD majori longitudine quàm est AD excedet, id est, ipsa AK binis re-

[1] Cum enim ex hypothesi anguli ACI & BCI æquales ponantur, erunt quoque anguli ACK & BCK, qui ipsis sunt deinceps, per 13 primi æquales.

Fig. III.



ctis KD, DA simul sumptis major erit. Quod cum absurdissimum sit [2], non secat itaque Hyperbolam recta ICK, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia

[2] per 20 primi.

recta

[1] per 3 Corol. 6 primi hujus.

recta Hyperbolam contingere quàm ICK[1], manifestum est conversim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque A B C bifariam dividere.

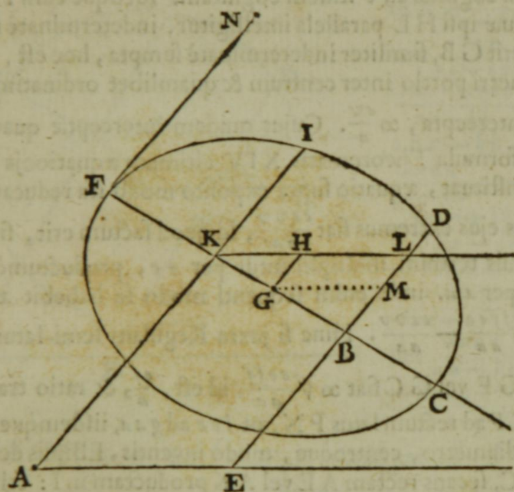
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XIV.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y \infty z + c - \frac{bx}{a}$, eoque substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} - cc \infty - xx + dx + kk$. id est, factâ decenti transpositione, erit $zz \infty - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$ sive $zz \infty \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito autem a majore quàm b, ac multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx absque fractione inveniatur, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - xx \frac{+daax - 2bacx}{aa - bb} + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Jam verò si facilioris operationis gratiâ loco $\frac{daa - 2bac}{aa - bb}$ substituatur $2h$: erit æquatio $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - xx + 2hx + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, aut $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$.

Hinc si juxta Regulam assumatur $v \infty x - h$ sive $x \infty v + h$, atque hoc in locum ipsius x, ejusque quadratum loco xx substituatur, ac expungantur quæ se invicem destruunt, habebitur $\frac{aazz}{aa - bb} + vv - hh \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositione, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - vv + hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Atque ita apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV, ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferentiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco $\frac{aa}{aa - bb}$ scribatur $\frac{l}{g}$, & loco $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ scribatur ff, ita ut æquatio sit talis $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$.

Ad

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac descriptionem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K vel ejusdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $z \propto y - c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta K L eidem parallela, ita ut pars rectæ A K omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K,



E L, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam K L ducenda est recta K B in tali angulo, ut rectarum omnium ipsi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B intercipiuntur (veluti L B) ad partes ipsius K L, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ L K) eandem habeant rationem, quæ est inter b & a, hoc est, ut sit uti a ad b, ita K L ad L B. Atque ita positâ K L sive A E, indefinitè sumptâ, $\propto x$, L B omnesque ipsi parallelæ inter K L & K B interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Unde ex prædictis constat diametrum fore in recta K B,

ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K æquidiſtantes. Jam verò cum v ſit $\infty\ x - b$, à recta K L ſive A E auferenda eſt K H, ita ut eadem K H ſit $\infty\ b$, ideoque H L indefinitè quoque ſumpta $\infty\ x - b$ ſeu v. Deinde per punctum H ducenda eſt H G ipſi A K parallela, ſecans inventam diametrum in G, eritque idem interſectionis punctum G quæſitæ Ellipſeos centrum. Porrò quoniam ſimilium triangulorum K H G & K L B nota eſt ratio lateris K H ad H G ſive K L ad L B, ut & angulus ſub iiſdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel aſſumpto E A K, erit quoque nota ratio lateris K H ad latus K G ſive K L ad K B, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum H L ſive G M, quæ ipſi H L parallela intelligitur, indeterminatè ſumpta ſit $\infty\ v$, erit G B, ſimiliter indeterminatè ſumpta, hoc eſt, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\infty\ \frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum conſtituat, æquatio ſupra expoſito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, ſi ſinguli æquationis termini multiplicentur per ee, productumque dividatur per aa. inde enim ſequenti modo ſe habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa}\ \infty\ \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum G F vel G C fiat $\infty\ \sqrt{\frac{eeff}{aa}}$, id eſt, $\frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris C F ad rectum latus F N, ut lee ad gaa, iiſdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipſis deſcribatur F D C, ſecans rectam A E vel A K productam in I: erit curva I D C Locus quæſitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A K parallelâ, ac ſi opùs ſit productâ ut ſecet rectas K L & K B in L & B, ſi eadem D E vocetur y, erit D B, hoc eſt, D E $-$ E L $+$ L B $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$ ſeu z. Eſt autem ut jam annotatum eſt G B $\infty\ \frac{ev}{a}$, atque ex conſtructione G F vel G C $\infty\ \frac{ef}{a}$, ideoque F B $\infty\ \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & B C $\infty\ \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum F B C $\infty\ \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipſis ſit ut N F ad F C, hoc eſt,

ut

ut gaa ad lee, ita DB quadratum, hoc est, zz ad prædictum rectangulum FBC; erit $\frac{leezz}{gaa} \propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id est, multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per ee, erit $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$, ideoque restituto $x - h$ loco v, atque $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff, ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \propto hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx + 2hx - hh$, hoc est, $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Porrò restituto $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$, fiet $\frac{aazz}{aa - bb} + xx \frac{- daax + 2bcax}{aa - bb} \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id est, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac divisione per aa, erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx + \frac{2bcx}{a} \propto cc + kk$. Ac denique loco z factâ restitutione ipsius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque iis quæ se invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebitur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto - xx + dx + kk$. Quod determinandum ac demonstrandum erat.

Notandum porrò hic est, quòd si angulus AKB foret rectus, ac proinde ordinatim applicatæ, ut DB, KI, &c. ad diametrum KB perpendiculares, ac simul FN æqualis FC, prædictam curvam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perspicuum est.

PROBLEMA III.

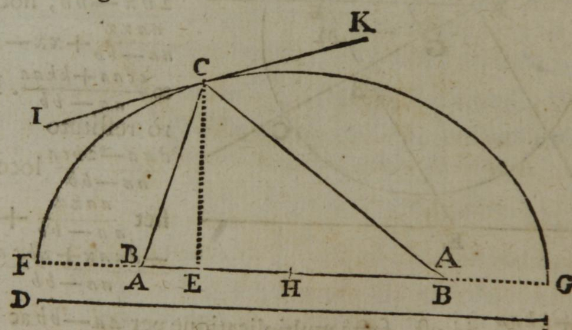
Propositio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ simul sumptæ datæ longitudini æquales sint; locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C; ita nempe, ut ductæ rectæ CA, CB simul sumptæ æquales sint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit,

Fig. 1.



intelligatur demissa perpendicularis, ut CE. Tum suppositis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis assumptum angulum rectum AEC comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac posterior, nempe EC, nominetur y; ipsa autem AB seu datorum punctorum distantia cognita appelletur a, & data D exprimatur per b. Hinc cum BE sive (si punctum E cadat inter A & B) AB — AE, aut (si punctum B inter A & E cadat) AE — AB sit ∞ $a = x$; atque AC ∞ $\sqrt{xx+yy}$; & CB ∞ $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; sitque D — AC ∞ CB: æquatio erit $b-\sqrt{xx+yy}$ ∞ $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; factâque operatione

ne decenti, ut utraque æquationis pars à ſigno radicali liberetur, & tranſpoſitis tranſponendis, erit

$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \infty b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$,

hoc eſt, factâ diviſione per $4bb - 4aa$, erit

$xx - ax \infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb-aa}$. Aſſumpto deinde juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, eâque ſubſtitutâ in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, expunctiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt: erit $xx \infty \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb-aa}$, ſive $\frac{bbyy}{bb-aa} \infty \frac{1}{4}bb - xx$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 13[tii], ac proinde Locus quæſitus Ellipſis. Cumque v aſſumpta ſit pro $x - \frac{1}{2}a$, ſi ab A versùs E ſumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & ſemi-diameter tranſverſa (velut H F ab una, & H G ab altera parte) $\infty \frac{1}{2}b$; ita ut diameter tranſverſa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad eandem perpendicularem, tranſverſus quoque axis eſt,) ſit ∞b. Ratio autem tranſverſæ diametri ad parametrum, ſeu quadrati tranſverſæ ad quadratum ſecundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Unde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi expoſita ſunt, quæſita Ellipſis facillimè deſcribetur. Porrò cum quadratum ſemi-diametri tranſverſæ ſit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum ſemi-ſecundæ diametri $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum F B ſeu G A ſit $\infty \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & B G ſeu A F $\infty \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum F B G ſeu G A F $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato ſemi-ſecundæ diametri, ſive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad tranſverſum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipſa ſunt, quæ vulgò Ellipſeos Foci ſive Umbilici nuncupantur. Unde apparet, ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium 1.

Quæ à quolibet in Ellipſi puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducuntur, ſimul ſumptæ tranſverſo axi æquales ſunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola ſuperiùs demonſtratum eſt, ductarum C A, C B differentiam tranſverſo axi F G æquari, ita & hìc earum aggregatum eidem tranſverſo axi æquale eſſe oſtendetur, nempe, ſi non per additionem & compoſitionem, ut

ut ibidem factum est, sed per subductionem & divisionem argumentatio instituatur. Quod ipsum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantiùs quoque in hunc modum absolvi posse videtur.

Esto quælibet Ellipsis FCG, cujus centrum H, axis major FG, minor OP, atque Umbilici A & B; adeoque rectangulum FBG ut & GAF æquale quadrato semi-secundæ diametri HO.

Ductis ab assumpto quolibet curvæ puncto C rectis CA, CB, ordinatim ad utrumque axem applicentur CE, CN; & fiat ut HF ad HA, ita HE ad HM, adeò ut [1] AHE rectangulo æquale sit rectangulum FHM; sumaturque HQ æqualis ipsi HE. Hinc cum sit [2] ut HF*q* ad HA*q*, ita HE*q* ad HM*q*, erit quoque per conversionem rationis ut HF*q* ad GAF seu [3] HO*q*, id est [4], ut CN*q* sive HE*q* ad ONP, ita idem HE*q* ad EMQ; ac proinde [5] æqualia sunt rectangula ONP & EMQ. Quocirca cum [6] HM*q* unà cum EMQ, id est, cum ONP rectangulo, æquale sit HE*q*; sitque & HF*q* [7] æquale quadratis rectarum HA & (HO [8] seu [9]) CE unà cum rectangulo ONP: erunt HM*q* + ONP + HF*q* æqualia HE*q* + HA*q* + CE*q* + ONP. Ac proinde si utrinque auferatur ONP rectangulum, remanebunt bina quadrata rectarum HM & HF seu HG simul æqualia tribus quadratis rectarum HE, HA seu HB, & CE.

Hinc

[1] *per 16 sexti.*
[2] *per 22 sexti.*
[3] *ex hypothesi.*
[4] *per 13 primi hujus ejusque Corol. 1.*
[5] *per 9 quinti.*
[6] *per 5 secundi.*
[7] *per 5 secundi.*
[8] quippe quadr. ex HO æquale est GAF rectang. ex hypoth.
[9] *per 5 secundi.*

Hinc additis ablatisvè ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum FHM seu GHM bis ab una, & AHE seu BHE bis ab altera parte: erit [1] FM*q* æquale (AE*q*+CE*q*, id est [2],) AC*q*: itemque [3] GM*q* æquale (BE*q*+CE*q*, id est [4],) BC*q*. Cumque propterea recta FM æquetur ipsi AC, & GM ipsi BC: erit ipsarum AC & BC aggregatum transverso axi FG æquale. Quod demonstrandum erat.

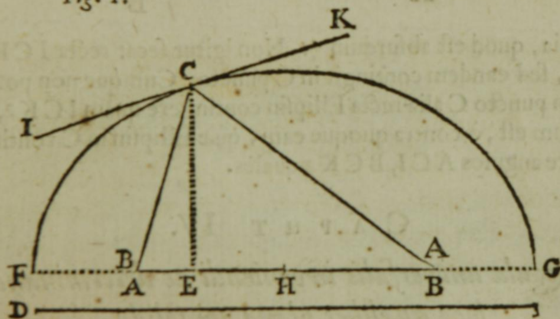
[1] per 7 secundi.
[2] per 47 primi.
[3] per 4 secundi.
[4] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipseos puncto ad utrumque Umbilicum rectis, si per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos constituens, eadem curvam in dicto puncto contingit; & contra.

Si enim recta ICK ita ducta, ut æquales sint anguli ACI, BCK, non contingat Ellipsin in C puncto, secet eandem, si fieri potest, in C & K. Deinde productâ AC ad L, ita ut tota AL

Fig. 1.

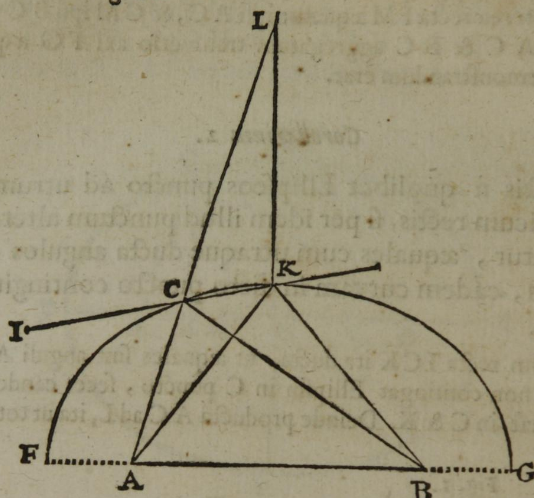


axi FG, ideoque [5] adjecta CL ipsi CB æqualis sit, jungantur AK, BK, LK. Cum igitur, in triangulis LCK, BCK latera LC, CK lateribus BC, CK, utrumque utrique, circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis LK basi BK æqualis. At verò cum punctum K in Ellipsi supponatur, erunt, per

[5] per Corol. 1 hujus.

per Corollarium præcedens, rectæ AK, KB, hoc eſt, latera AK, KL ſimul ſumpta tranſverſo axi FG, ideoque & baſi AL

Fig. 11.



[1] per 20 primi. æqualia, quod eſt abſurdum [1]. Non igitur ſecat recta ICK Ellipſin, ſed eandem contingit in C puncto. Cumque non poſſit in eodem puncto C alia recta Ellipſin contingere quàm ICK [2], manifeſtum eſt, è contra quoque eam, quæ Ellipſin in C contingit, efficere angulos ACI, BCK æquales.

[2] per 17 primi hujus.

CAPUT IV.

Regula univerſalis inveniendi ac determinandi loca quælibet plana & ſolida.

Jam verò his omnibus ita præmiſſis, pro generali Regula concludi poteſt, æquationes omnes, quæ in indagatione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere poſſunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in ſe ducta, neque factum ſub iiſdem ad ſolidum

lidum excurrat, ſed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua ſequentium formularum conſtare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci poſſe: nimirum,

1^{mò}. $y \propto \frac{bx}{a}$, ſive, quod idem eſt, $y \propto x$: cum ſupponi poſſit eſſe $a \propto b$.
$y \propto \frac{bx}{a} \pm c$, vel $y \propto c - \frac{bx}{a}$.

Signum $\pm$ *ſignificat* + *vel* —.

Sed hîc notandum, fieri etiam poſſe, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evaneſcat, alteraque ſola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, ſicut ſuperiùs expoſitum eſt.

2^{dò}. $yy \propto dx$, aut converſim $dy \propto xx$.
$yy \propto dx.ff$, aut converſim $dy.ff \propto xx$.
$zz \propto dx$, aut converſim $dy \propto vv$.
$zz \propto dx.ff$, aut converſim $dy.ff \propto vv$.

3^{tiò}. $yy \propto \frac{lxx}{g}.ff$ — ſive etiam — $yx \propto ff$.
$zz \propto \frac{lxx}{g}.ff$ — $zx \propto ff$.
$yy \propto \frac{lvv}{g}.ff$ — $yv \propto ff$.
$zz \propto \frac{lvv}{g}.ff$ — $zv \propto ff$.

Supponendo ubique y & x eſſe quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z eſſe quantitatem aſſumptam, & quæ compoſita ſit ex $y \pm$ aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x, permixta ſit; atque v quidem aſſumptam quoque eſſe, ſed eo caſu conſtare ſolummodo ex $x \pm$ aliâ quantitate cognitâ, abſque ulla ipſius y incognitæ quantitatis permixtione: aut contra v eſſe $\propto x \pm$ aliâ quâdam quantitate

titate, cui & y incognita permixta esse possit atque eo quidem casu z ex y & aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1. comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundùm signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

Ut autem prædicta Loca specificè determinentur sive prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituant in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea A B, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus A B E, quem faciunt quantitates y & x, in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cùm Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \infty x$ vel $y \infty \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea A B punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut H B E, ita ut angulus A B E præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut A B & B D sint æquales, vel ut A B sit ad B D, sicut a ad b, atque ex A per punctum D ducatur recta A D: erit eadem A D indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c, ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est è puncto A ad eandem partem lineæ A B quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta A F ipsi H B E parallela atque æqualis c cognitæ; ductâque F E vel F G, quæ rectam A B secet in O, ipsi A D parallelâ: erit F E vel O G indefinitè producta Locus quæsitus.

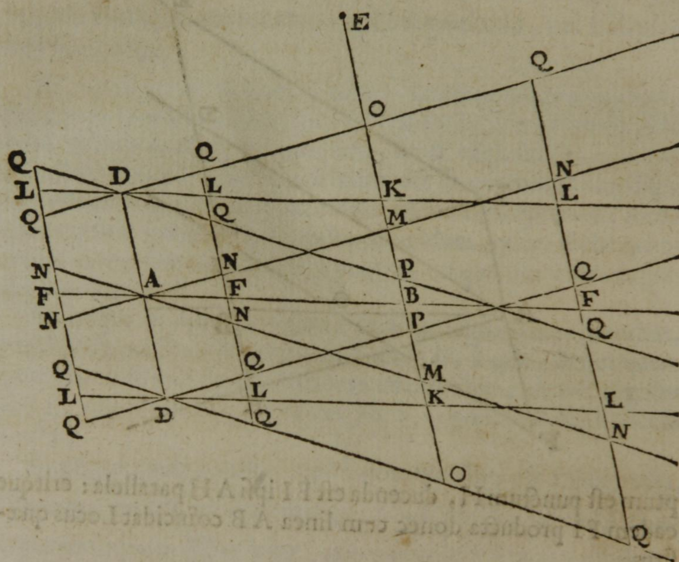
Sed

Sed si æquatio sit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea HBE sumendum est ab altera parte lineæ AB, quâ datus vel assumptus angulus ABE existit, punctum H, ita ut AB ad BH sit, sicut a ad b; ductâque AH, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ AB, quâ sumptum est punctum H, ducenda est FI ipsi AH parallela: eritque eadem FI producta donec cum linea AB coïncidat Locus quæsitus.

Etenim, cum tam AB quàm BD sit $\propto x$, aut AB ad BD ab una, ut & AB ad BH ab altera parte, sit ut a ad b; ac proinde BD vel BH $\propto \frac{bx}{a}$: itemque, cum AF seu DE vel DG ut & HI sint æquales c cognitæ: erit BE sive BD + DE $\propto \frac{bx}{a} + c$, & BG sive BD — DG $\propto \frac{bx}{a} - c$, ac BI sive HI — HB $\propto c - \frac{bx}{a}$. Unde cum punctum B sumptum sit utcunque, eadem erit de omnibus aliis, in linea AB, prædictisvè locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas AD, FE, FG, & FI esse Loca quæsita. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

At verò si juxta formulas sub N°. 2 exhibitas Locus quæsitus sit linea Parabolica, erit

I. Primo casu, quando æquatio est $yy \infty dx$, ipsa AB Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales, atque ejusdem vertex A punctum.



II. Secundo casu positâ æquatione $yy \infty dx.ff$, manente diametro in eadem linea AB, sumptâque, ut in sequenti figura, $AF \infty \frac{ff}{d}$, erit ejusdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, si uterque terminus tam dx quàm ff signo + sit affectus, ab altera parte puncti A, quâ est punctum B, sumendum est; sed si vel terminus dx, vel terminus ff signo — affectus sit, ab eadem parte puncti A, quâ est punctum B, sumi debet: & quidem si terminus dx signo + affectus sit, ab A versùs B Parabola describenda est; sin contra terminus dx signo — affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, describi debet.

At

At si æquatio sit $zz \infty dx$, vel $zz \infty dx.ff$, cum z non sit quantitas primò concepta sed assumpta, vel assumpta erit pro $y \, 8 \, c$, vel pro $y \, 8 \, \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \, 8 \, \frac{bx}{a} \, 8 \, c$.

III. Et si quidem z assumpta sit pro $y \, 8 \, c$, qui sit casus tertius, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela atque ∞c; ita ut, si z assumpta sit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ AB, quam conceptus est angulus ABE: Et, si z sit assumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ AB cadat. Deinde ductâ DK ipsi AB parallelâ, erit in eadem DK Parabolæ diameter, & D vertex, si æquatio sit $zz \infty dx$.

IV. Sed si sit $zz \infty dx.ff$, qui sit quartus casus, sumptâ DL ∞ $\frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per + vel — affectione eodem modo, ut supra de puncto F dictum est, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx signo + vel — adfectus fuerit, ipsa Parabola, ut supra notatum est, describi debet: eritque omnibus & singulis prædictis quatuor casibus Parameter ∞d.

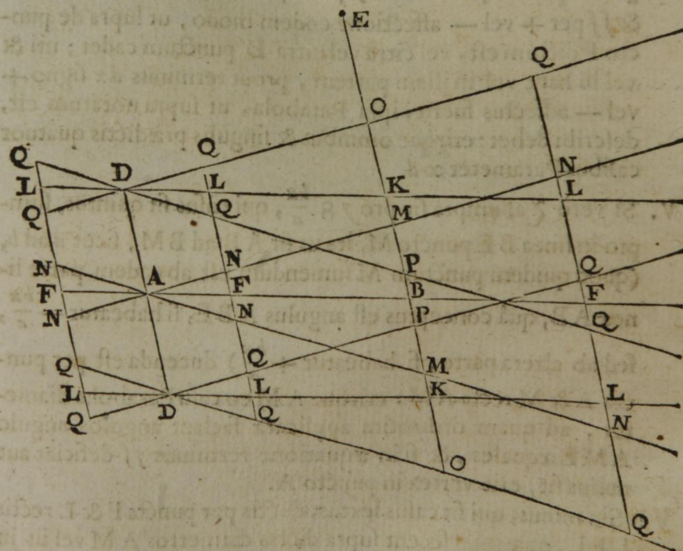
V. Si verò z assumpta sit pro $y \, 8 \, \frac{bx}{a}$, qui casus sit quintus, sumpto in linea BE puncto M, ita ut sit AB ad BM, sicut a ad b, (quod quidem punctum M sumendum est ab eadem parte lineæ AB, quâ conceptus est angulus ABE, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, sed ab altera parte, si habeatur $+\frac{bx}{a}$) ducenda est per puncta A & M recta AM: eritque AM eo casu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo AME æquales, & si in æquatione terminus ff deficiat aut nullus sit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui sit casus sextus, ductis per puncta F & L rectis LFL, quæ intersecent supra dictas diametros AM vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel signo + vel signo — affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipsa Parabola pro varia termini dx affectione, ut supra notatum est, describenda erit.

Si denique z assumpta sit pro $y \infty \frac{bx}{a} \infty c$, ductâ, ut modò expositum fuit, A D ∞c, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum + vel — affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ A B sumi debet) ducenda est recta D O ipsi

VII. AM, quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diverso, qui sit casus octavus, ducenda est recta D P parallela ipsi A M, quæ est ab adversa parte lineæ A B, atque eadem D O vel D P sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo D O E vel D P E æquales: eritque vertex punctum D, si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum D O vel D P diametrorum & linearum L F L communis intersectio, videlicet punctum Q, quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum + vel — affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

hanc vel versùs illam partem pro diversa termini dx affectione, ut supra est notatum, describenda est: Ac postremis quidem istis quinque casibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, sicut A B ad A M, hoc est, erit ut A M ad A B, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonstratio perfacilis est. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris descriptæ, quæ per annotatos vertices transeant, sitque ordinatim ad easdem diametros applicatarum aliqua in recta O E utcunque sumpta, & supponatur easdem Parabolas prædictam applicatam secare in E puncto: eritque primo casu, cum pars diametri A B inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti A B, concipiatur, ut x, ac singulæ illæ applicatæ, ut y; sitque Parameter $\infty\, d$, atque ex natura Parabolæ [1] rectangulum sub dicta Parametro & recta A B contentum sit ∞ B E quadrato: erit $dx \infty yy$. [1] per 1 primi hujus.

Secundo casu, ubi vertex est in puncto F cum triplici distinctione, ut supra monitum est, notandum primò venit, in casibus, ubi æquatio est $yy \infty dx \pm ff$, punctum B in linea F B ab A versùs B indefinitè sumi posse: cum istis casibus ab A versùs B Parabolam describendam esse supra annotatum sit; At verò casu, ubi æquatio est $yy \infty ff - dx$, cum juxta Regulam Parabola in contrariam partem ab F versùs A sit describenda, punctum B non nisi inter F & A assumendum esse. id quod etiam ex ipsa æquatione manifestum est. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \infty ff - dx$ sive quod idem est $ff - yy \infty dx$, terminus ff major est quàm dx, utpote eundem excedens quantitate yy; idcirco quoque si utrinque divisio fiat per d, $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x. Quare cum secundùm Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ A F, & $x \infty$ rectæ A B, erit similiter recta A F major quàm A B; ideoque B punctum inter A & F puncta, sicut dictum est, cadet. id quod ad casus quoque sequentes applicatum esto. Porrò quoniam A F est $\infty \frac{ff}{d}$, erit F B (hoc est, observatâ triplici distinctione, ut prædictum est, A B $\pm$ A F, atque etiam A F — A B) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$, atque

atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ BE
2. sive yy, ac proinde $yy \infty dx$ 8 ff, atque $yy \infty ff - dx$.

Tertio casu, ubi vertex est in puncto D, ac diameter in recta DK, quoniam AD seu BK est ∞c: erit KE, hoc est, $BE - BK \infty y - c$; & KBE, hoc est, $BE + BK \infty y + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro y 8 c, erit KE & KBE ∞z. Est autem DK seu AB ∞x, parameterque ∞d, & rectangulum sub dicta Parametro & recta DK contentum ∞ quadrato ex KE vel KBE. Quare cum hoc quadratum sit ∞zz, atque
3. rectangulum illud ∞dx, erit $zz \infty dx$.

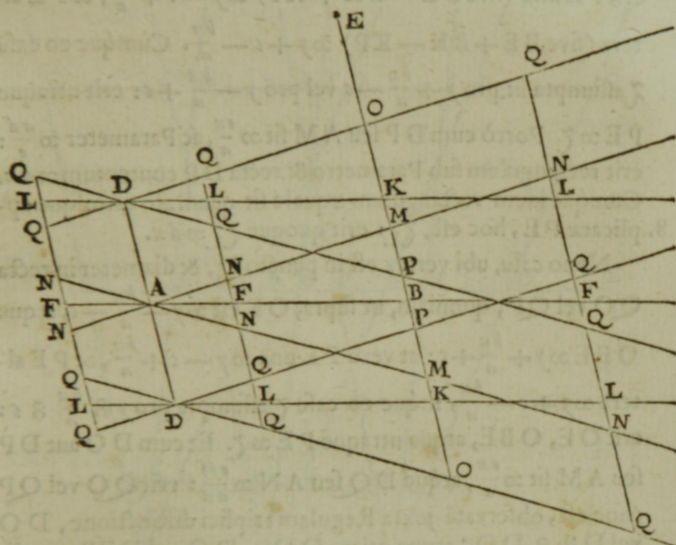
Quarto casu, ubi manente diametro in recta DK vertex est in puncto L, quoniam DL sive AF est $\infty \frac{ff}{d}$, erit LK (hoc est, observatâ triplici distinctione juxta Regulam, DK 8 DL, atque etiam LD — DK) æqualis x 8 $\frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$. quâ multiplicatâ per Parametrum d, fit rectangulum dx 8 ff, atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ KE vel KBE, hoc est, zz: eritque proinde $zz \infty dx$ 8 ff, atque
4. $zz \infty ff - dx$.

Quinto casu, ubi vertex est in puncto A, diameterque in recta AM, cum sit ut a ad b, ita AB, hoc est, x, ad BM: erit BM $\infty \frac{bx}{a}$, ideoq; ME, hoc est, $BE - BM \infty y - \frac{bx}{a}$, & MBE, hoc est, $BE + BM \infty y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo casu z assumpta est pro y 8 $\frac{bx}{a}$, erit ME & MBE ∞z. At cum in triangulo ABM cognita sint & angulus ABM, & ratio laterum AB, BM, dictum angulum comprehendentium, nota quoque est [a] ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in specie etiam lateris AB ad AM, quæ sit ut a ad e. Ac proinde cum sit ut a ad e, ita AB, h.e., x ad AM: erit AM $\infty \frac{ex}{a}$. Cumque porrò juxta Regulam eo casu sit ut AM ad AB, hoc est, ut e ad a, ita d ad Parametrum: erit Parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Quâ multiplicatâ per AM seu $\frac{ex}{a}$, fiet rectangulum ∞dx. Quod æquale est quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc est, zz; ac proin-
5. de est $zz \infty dx$.

[a] per 6 sexti.

Sexto

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in recta N M, quoniam est ut A B ad A M, ita A F ad A N, hoc est, ut a ad e, ita $\frac{ff}{d}$ ad A N: erit A N $\infty \frac{eff}{ad}$, & N M (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, A M 8 A N, atque etiam N A — A M) æqualis $\frac{ex}{a}$ 8 $\frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{e}$, fit rectangu-



lum dx 8 ff, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale sit quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc est, zz: erit
6. $zz \infty dx$ 8 ff, atque $zz \infty ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in recta D O, quoniam A D seu M O est ∞c, erit O E (sive B E — B M — M O) $\infty y - \frac{bx}{a} - c$, & O B E (sive B E + B M + M O) $\infty y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y - \frac{bx}{a} - d$, vel pro $y + \frac{bx}{a} + d$: erit O E & O B E ∞z. Porrò cum D O

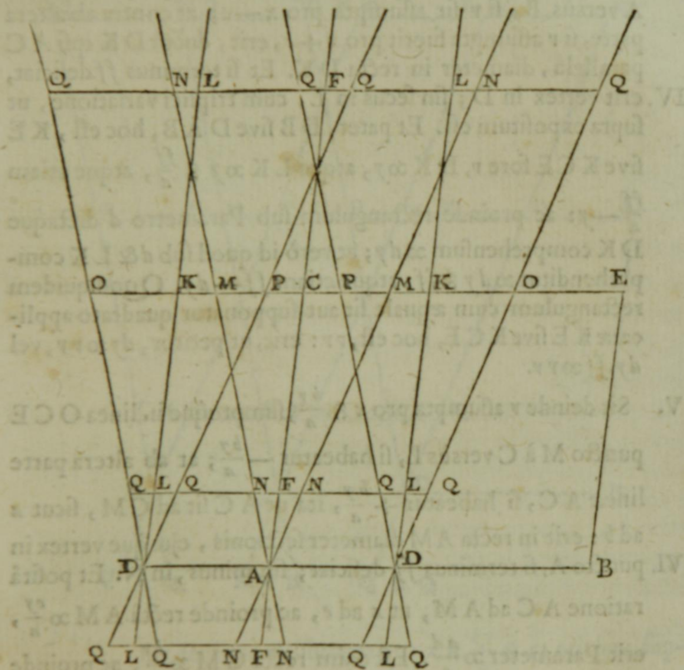
seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, Parameterque sectionis $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D O contentum $\infty\, dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ O E vel
7. O B E, id est, zz: erit $zz \infty\, dx$.

Octavo casu, ubi, manente vertice in puncto D, diameter est in recta D P, quoniam A D seu B K est $\infty\, c$, & K P $\infty \frac{bx}{a}$, erit P E una (sive B E — B K + K P) $\infty\, y - c + \frac{bx}{a}$, & P E altera (sive B E + B K — K P) $\infty\, y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque P E $\infty\, z$. Porrò cum D P seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, ac Parameter $\infty \frac{ad}{e}$: erit rectangulum sub Parametro & recta D P contentum $\infty\, dx$. Cumque idem rectangulum æquale sit quadrato utriusque ap-
8. plicatæ P E, hoc est, zz: erit quoque $zz \infty\, dx$.

Nono casu, ubi vertex est in puncto Q, & diameter in recta Q O vel Q P, quoniam, ut supra, O E est $\infty\, y - \frac{bx}{a} - c$, atque O B E $\infty\, y + \frac{bx}{a} + c$; at verò P E una $\infty\, y - c + \frac{bx}{a}$, ac P E altera $\infty\, y + c - \frac{bx}{a}$, sitque eo casu z assumpta pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$: erit O E, O B E, atque utraque P E $\infty\, z$. Et cum D O aut D P seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, atque D Q seu A N $\infty \frac{eff}{ad}$: erit Q O vel Q P (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, D O vel D P 8 D Q, atque etiam Q D — D O vel D P) æqualis $\frac{ex}{a} \; 8 \; \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Unde si eadem Q O vel Q P multiplicetur per Parametrum $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\infty\, dx$ $8\; ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ O E, O B E, aut utriusque P E,
9. hoc est, zz: erit quoque $zz \infty\, dx \; 8\; ff$, atque $zz \infty\, ff - dx$. Quæ quidem omnia sunt, quæ hîc demonstranda erant.

Quod autem ad æquationes superioribus novem casibus conversim correspondentes spectat, ut lineæ Parabolicæ describantur, quæ sint Loca quæsita: positis iisdem, ut supra, per punctum

punctum A ducenda est recta A C ipsi B E parallela, ac deinde ipsa A C, ubique consideranda, ut considerata fuit recta A B in superiori figura. Porrò sumpto in eadem A C puncto utcunque, veluti C, atque per id ductâ rectâ ipsi A B parallelâ, velut O C E, erit similiter hæc O C E ubique consideranda, sicut considerata fuit recta O B E in præcedenti figura, nullâ scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ, si æ-
I. quatio sit $dy \infty xx$, erit A C diameter, A vertex, & Parame-



ter ∞d. Cum enim A C seu B E sit concepta ut y, & C E seu A B ut x, rectangulumque sub Parametro & A C contentum, hoc est, dy, æquetur quadrato rectæ C E seu A B, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy \infty xx$.

II. Si æquatio sit $dy.ff \infty xx$, sumptâ A F $\infty \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta F C, atque Parametro ∞d. Est

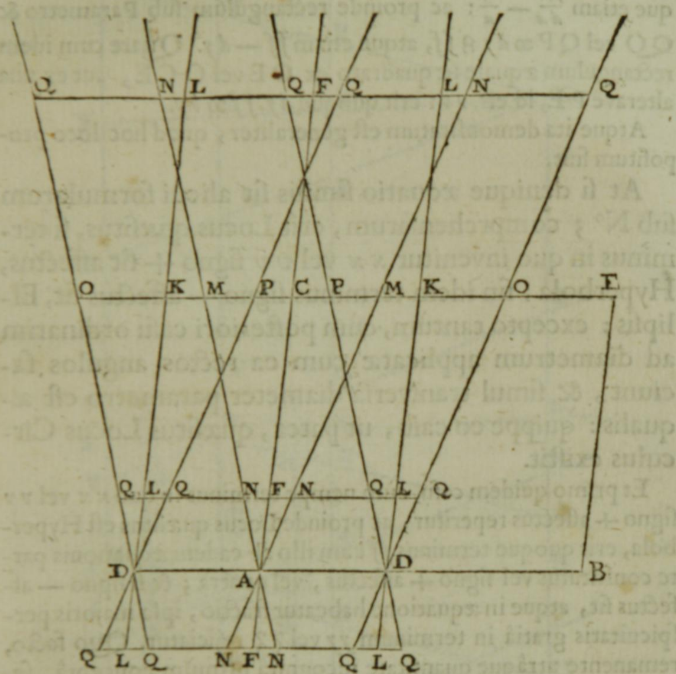
enim pro triplici juxta Regulam distinctione $FC \infty y \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro ac eadem FC contentum $\infty\, dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ CE, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy . ff \infty xx$.

III. Si æquatio sit $dy \infty vv$, vel $dy . ff \infty vv$, atque v primùm assumpta sit pro $x \pm c$, factâ $AD \infty c$, sumptoque puncto D ab A versùs B, si v sit assumpta pro $x - c$; at contra ab altera parte, si v assumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ DK ipsi AC parallelâ, diameter in recta DK. Et si terminus ff deficiat,
IV. erit vertex in D; sin secus in L, cum triplici variatione, ut supra expositum est. Et patet, DB sive DAB, hoc est, KE sive KCE fore v, $DK \infty y$, atque $LK \infty y \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro d dictaque DK comprehensum $\infty\, dy$; at verò id quod sub d & LK comprehenditur $\infty\, dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit aut supponatur quadrato applicatæ KE sive KCE, hoc est, vv: erit, ut petitur, $dy \infty vv$, vel $dy . ff \infty vv$.

V. Sit deinde v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a}$, sumptoque in linea OCE puncto M à C versùs E, si habeatur $- \frac{by}{a}$; at ab altera parte lineæ AC, si habeatur $+ \frac{by}{a}$, ita ut AC sit ad CM, sicut a ad b: erit in recta AM diameter sectionis, ejusque vertex in
VI. puncto A, si terminus ff deficiat; sin minus, in N. Et positâ ratione AC ad AM, ut a ad e, ac proinde rectâ $AM \infty \frac{ey}{a}$, erit Parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Est enim recta $CM \infty \frac{by}{a}$, ac proinde $ME \infty y - \frac{by}{a}$, atque $MCE \infty y + \frac{by}{a}$, id est, ME vel $MCE \infty v$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum sub dicta Parametro & recta AM contentum ∞ quadrato ex ME vel MCE, erit, $dy \infty vv$.

Porrò cum NA sit $\infty \frac{ffe}{da}$, erit $NM \infty \frac{ey}{a} \pm \frac{ffe}{da}$, atque etiam

etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum sub Parametro & recta N M contentum $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum sit ∞ quadrato ex M E vel M C E, hoc est, vv; erit quoque $dy . ff \infty vv$.



Sit denique v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a} \pm c$: eritque, sup-
VII. VIII. positis iisdem quæ supra, diameter in D O, vel in D P;
IX. &, si terminus ff deficiat, vertex in D; sin minus, in Q. Et positâ ratione D K ad D O, ut & D K ad D P, sicut a ad e, ac proinde rectâ D O, ut & D P $\infty \frac{ey}{a}$; erit parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Est enim O E $\infty\ x - \frac{by}{a} - c$, atque

OCE $\infty\, x + \frac{by}{a} + c$; itemque P E una $\infty\, x - \frac{by}{a} + c$, ac P E altera $\infty\, x + \frac{by}{a} - c$, hoc eſt, O E, O C E, & P E una vel altera erit $\infty\, v$. Eſtque Q O vel Q P (ſicut ſupra N M) $\infty\, \frac{ey}{a}\ 8\ \frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum ſub Parametro & Q O vel Q P $\infty\, dy\ 8\ ff$, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale ſit quadrato ex O E vel O C E, aut ex una alteravè P E, id eſt, vv: erit quoque $dy.ff \infty vv$.

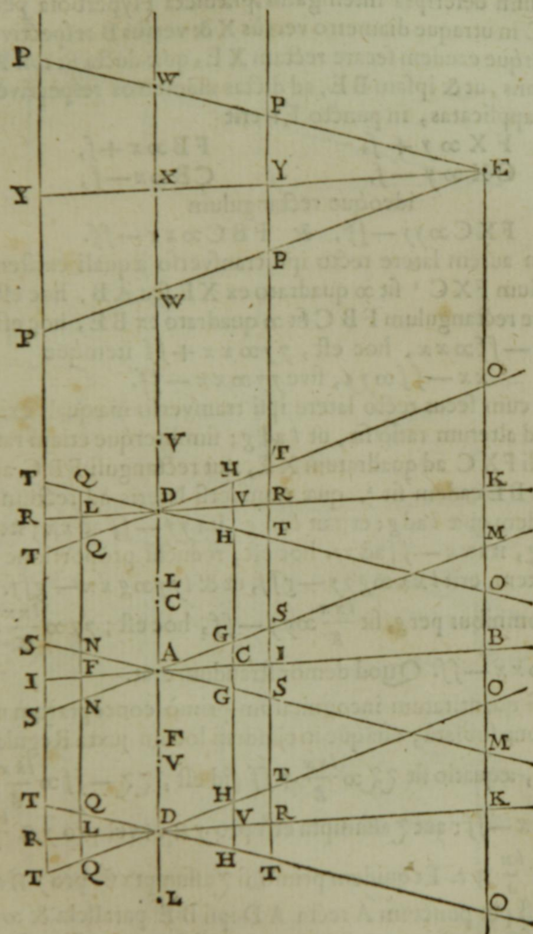
Atque ita demonſtratum eſt generaliter, quod hoc loco propoſitum fuit.

At ſi denique æquatio ſimilis ſit alicui formularum ſub N° 3 comprehenſarum, erit Locus quæſitus, ſi terminus in quo invenitur xx vel vv ſigno + ſit affectus, Hyperbola; ſin idem terminus ſigno — affectus ſit, Ellipſis: excepto tantùm, cùm poſteriori caſu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & ſimul tranſverſa diameter parametro eſt æqualis: quippe eo caſu, ut patet, quæſitus Locus Circulus exiſtit.

Et primo quidem caſu, cùm nempe terminus in quo xx vel vv ſigno + affectus reperitur, ac proinde Locus quæſitus eſt Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte conſtitutus vel ſigno + affectus, vel contra; & ſi ſigno — affectus ſit, atque in æquatione habeatur fractio, ipſa majoris perſpicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utrâque quantitate incognitâ primùm conceptâ, ſequenti formâ ſe exhibebit æquatio: $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$, (id eſt, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$: eritque, ut in ſequenti figura, caſu primo, nempe ſi terminus ff cum termino in quo xx unam æquationis partem conſtituens ſigno + affectus ſit, diameter Hyperbolæ deſcribendæ in recta A X, quæ ducitur per punctum A poſitione datæ B E parallela. Sin contra, hoc eſt, ſi terminus ff ſigno — affectus ſit, uti caſu ſecundo, erit diameter in data poſitione recta A B, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad eaſdem

Caſus 1mus, cùm Locus eſt Hyperbola.

eaſdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel aſſumpto angulo ABE æquales: eritque caſu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum ∞f, quod in



dictis diametris reſpectivè per lineas AC vel AF exprimatur. Porrò ſi l ſit ∞g, vel, quod idem eſt, ſi termino xx vel yy nulla adhæreat

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g.

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B respectivè; supponaturque eandem secare rectam X E, quæ ducta sit ipsi A B æquidistans, ut & ipsam B E, ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E: erit

$$FX \infty y + f, \qquad FB \infty x + f,$$
$$CX \infty y - f, \qquad CB \infty x - f;$$

ideoque rectangulum

$$FXC \infty yy - ff, \quad \& \quad FBC \infty xx - ff.$$

Cum autem latere recto ipsi transverso æquali existente rectangulum FXC [1] sit ∞ quadrato ex XE seu AB, hoc est, xx; itemque rectangulum FBC sit ∞ quadrato ex BE, hoc est, yy: erit $yy - ff \infty xx$, hoc est, $yy \infty xx + ff$ itemque $xx - ff \infty yy$, sive $yy \infty xx - ff$.

[1] *per 10 primi hujus.*

Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g; similiterque etiam ratio rectanguli FXC ad quadratum XE, aut rectanguli FBC ad quadratum BE eadem sit [2], quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g: erit ut l ad g, ita $yy - ff$ ad xx; itemque ut l ad g, ita $xx - ff$ ad yy. hoc est, reductâ proportione ad æqualitatem, erit $lxx \infty gyy - gff$, ut & $lyy \infty gxx - gff$. unde divisis omnibus per g, fit $\frac{lxx}{g} \infty yy - ff$, hoc est, $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$; & $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$. Quod demonstrandum erat.

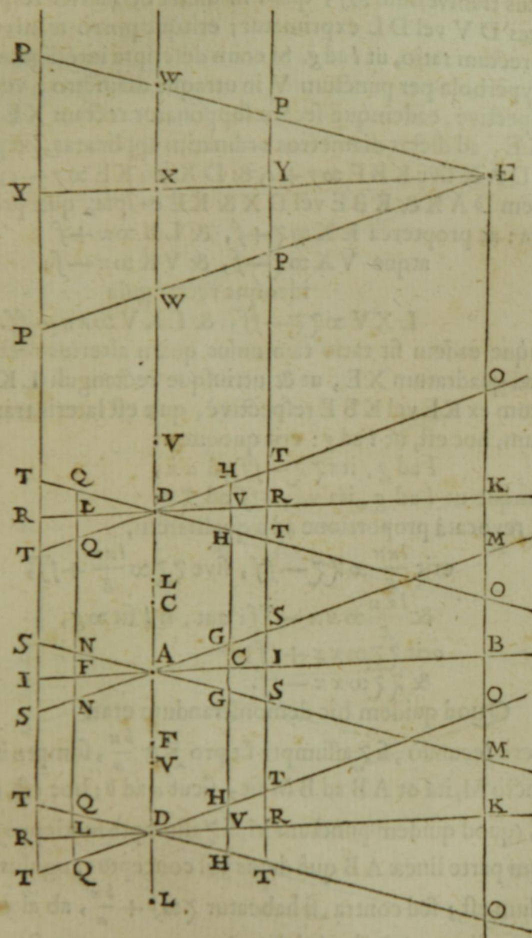
[2] *per 10 primi hujus.*

Casus 2dus, cùm Locus est Hyperbola.

At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$ (id est, $zz - ff \infty \frac{lxx}{g}$), vel $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$: aut z assumpta erit pro y 8 c, vel pro y 8 $\frac{bx}{a}$, aut

§. 1. pro y 8 $\frac{bx}{a}$ 8 c. Et quidem primò si z assumpta sit pro y 8 c, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela & ∞c; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ AB, quâ datus vel conceptus est angulus ABE. Sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum

ctum D reperiatur ab altera parte lineæ AB. Deinde per punctum D ductâ rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam B E productam, si opùs fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus ff signo + affectus sit, in recta D X. sin contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, in prædicta

recta D K; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E vel D K E sive D X E æquales. Eritque casu utroque D centrum sectionis, & semi-latus transversum ∞f, quod in dictis diametris respectivè per lineas D V vel D L exprimatur; eritque porrò transversi lateris ad rectum ratio, ut l ad g. Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versùs X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam X E, ut & ipsam K E, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit D A X sive K B E $\infty y+c$, & D X seu K E $\infty y-c$; ideoque eadem D A X & K B E vel D X & K E ea ipsa, quæ pro z est assumpta: ac propterea L X $\infty z+f$, & L K $\infty x+f$

atque V X $\infty z-f$, & V K $\infty x-f$:

ideoque rectangula

L X V $\infty zz-ff$, & L K V $\infty xx-ff$.

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli L X V ad quadratum X E, ut & utriusque rectanguli L K V ad quadratum ex K E vel K B E respectivè, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit quoque ut

l ad g, ita $zz-ff$ ad xx,

itemque ut l ad g, ita $xx-ff$ ad zz:

hoc est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

erit $\frac{lxx}{g} \infty zz-ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g}+ff$,

& $\frac{lzz}{g} \infty xx-ff$: aut, si l sit ∞g,

erit $zz \infty xx+ff$,

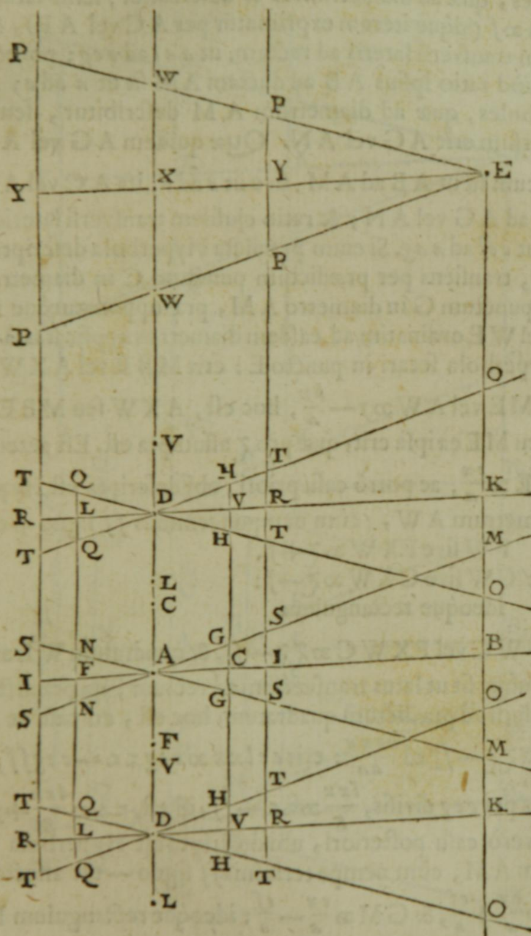
& $zz \infty xx-ff$.

Quod quidem hîc demonstrandum erat.

§. 2. At verò secundò, si z assumpta sit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, sumpto in linea B E puncto M, ita ut A B ad B M sit, sicut a ad b; hoc est, ut B M sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B quâ datus vel conceptus angulus A B E sumendum est; sed contra, si habeatur $z \infty y+\frac{bx}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ A B sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere A M, secantem H C H & Q F Q per prædicta puncta C & F ductas ipsi B E parallelas in punctis G & N.

Quo

Quo facto, si terminus *ff* signo + affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta A W ipsi B E parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut E W, sunt ipsi A M æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus *ff* signo — sit affectus, erit diameter in prædicta recta A M, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa

faciant angulos angulo AME vel AMBE æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum AW describitur, semi-latus transversum ∞f (idque iterum exprimatur per AC vel AF), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg; posito nimirum quòd ratio ipsius AB ad ductam AM sit ut a ad e; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum AM describitur, semi-latus transversum erit AG vel AN. Quæ quidem AG vel AN erit $\infty \frac{ef}{a}$; cum sit ut AB ad AM, sive ut a ad e; ita AC vel AF, hoc est, f, ad AG vel AN; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro AW & per punctum G in diametro AM, præsupponaturque rectam ME vel WE ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E: erit MBE vel AXW $\infty y + \frac{bx}{a}$, & ME vel AW $\infty y - \frac{bx}{a}$, hoc est, AXW seu MBE, uti & AW seu ME ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem AM seu WE $\infty \frac{ex}{a}$, ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AW, (cùm nempe terminus ff signo + est affectus) FW sive FXW $\infty z + f$,

& CW sive CXW $\infty z - f$:

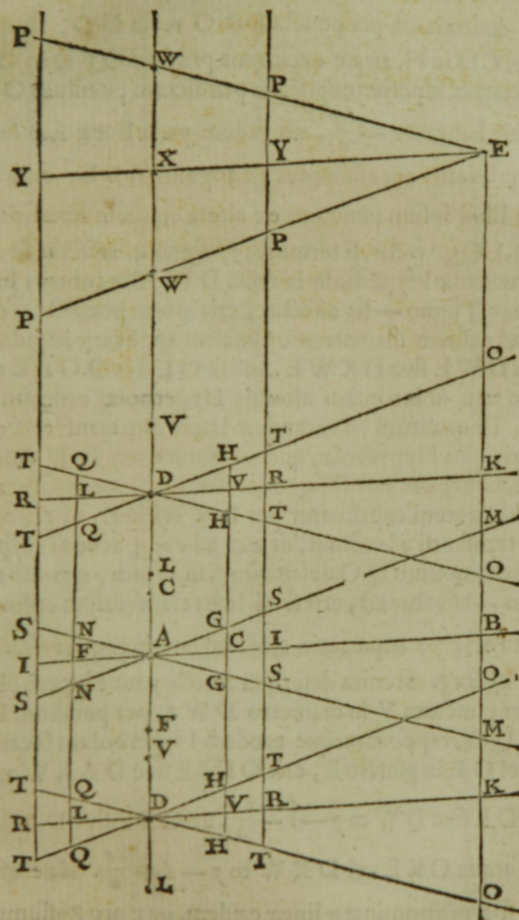
ideoque rectangulum

FWC vel FXWC $\infty zz - ff$, & quadratum WE $\infty \frac{eexx}{aa}$.

Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad eeg, ita $zz - ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, &, omnibus per eeg divisis, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, id est, $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AM, cùm nempe terminis ff signo — est affectus, erit NM $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & GM $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eexx}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag, ita prædictum rectangulum NMG ad

ad ME vel MBE quadratum, hoc eſt, ad zz: erit ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: ac proinde $eelzz \propto eegxx - eegff$.

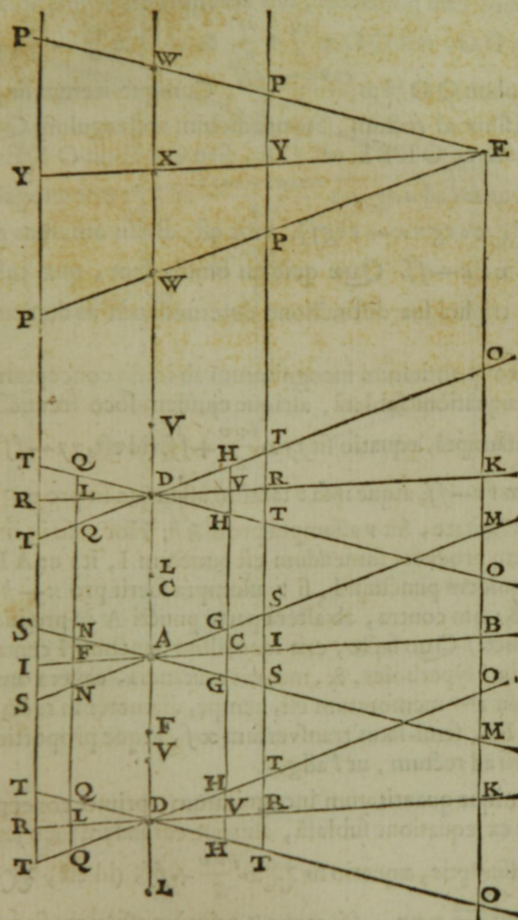


Hoc eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \propto xx - ff$. Quod hîc demonſtrandum erat.

§. 3. Si denique tertiò z assumpta sit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$, ductâ, ut supra, A D ∞f, & D K ipsi A B parallelâ, sumptoque in linea K E puncto O; ita ut D K ad K O sit, sicut a ad b, hoc est, ut K O sit $\infty \frac{bx}{a}$, ducenda est per puncta D & O recta D O, secans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (Constat autem ex superiùs explicatis prædictum punctum O, si in æquatione habeatur $-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B sumendum esse, quâ datus aut assumptus est angulus A B E; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum punctum ex altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, si terminus ff signo + affectus sit, erit diameter quæsitæ Hyperbolæ in recta D W. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo — sit affectus, erit ipsa in prædicta recta D O; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo D W E sive D X W E, aut D O E sive D O K E æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum D W describitur, hoc est, cùm terminus ff signo + afficitur, latus transversum ∞f. idque hîc iterum exprimatur per D V vel D L, ac ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut aal ad eeg; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum D O describitur, nimirum, quando terminus ff signo — affectus est, erit semi-latus transversum recta D Q vel D H, id est, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut eel ad aag. Si enim descripta intelligatur Hyperbola, transiens per punctum V in diametro D W & per punctum H in diametro D O, supponaturque eandem Hyperbolam secare rectam W E vel O E in puncto E, erit O K B E sive D A X W $\infty y + c + \frac{bx}{a}$, & O E sive D W $\infty y - c - \frac{bx}{a}$, ac O B E sive D A W $\infty y + c - \frac{bx}{a}$, atque O K E vel D X W $\infty y - d + \frac{bx}{a}$. Hoc est, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eædem, quæ pro z assumptæ sunt. Est autem D O seu W E $\infty \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum W E $\infty \frac{eexx}{aa}$: ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum

D W,

DW, cùm nempe terminus ff ſigno + afficitur, L W ſive L X W ∞ $z+f$, & V W ſive V X W ∞ $z-f$: ideoque rectangulum L W V ſive L X W V ∞ $zz-ff$. Cumque ſit ut latus



tranſverſum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad W E quadratum, hoc eſt, eo caſu, ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad

$\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, ac, divisis omnibus per eeg, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum D O, erit Q O $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & H O $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; ideoque rectangulum Q O H $\infty \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum Q O H ad quadratum ex O K B E vel O E, sive O B E aut O K E: id est, eo casu, ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: erit quoque proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$. Hoc est, divisis omnibus per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

Casus 3tius, cum Locus est Hyperbola.

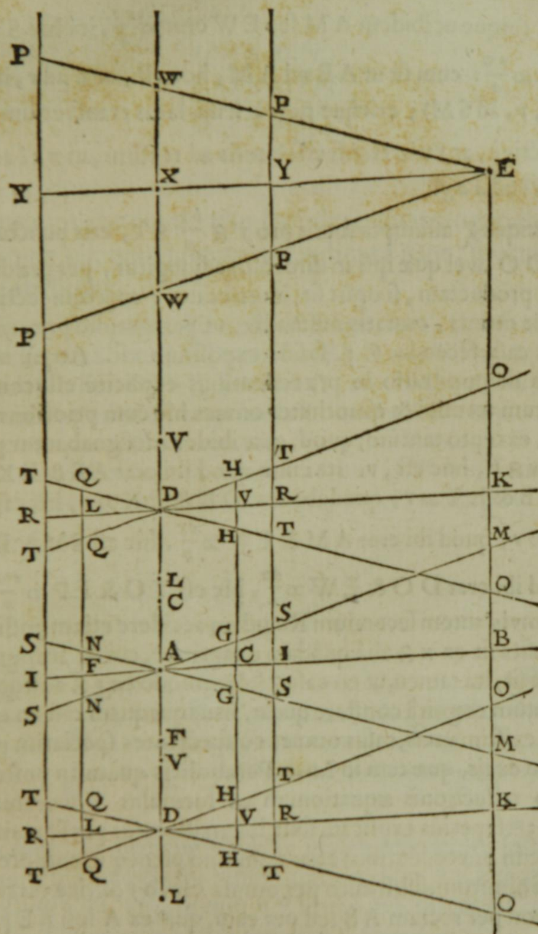
Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty vv - ff$; atque ipsa v tantùm assumpta sit pro x ♉ notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x ♉ b; Hoc casu in linea A B vel eâdem productâ sumendum est punctum I, ita ut A I sit ∞b (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - b$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta B A sumi debet.) Quo facto, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1mo memoratum est, nempe, diameter in recta I Y vel in recta I B, semi-latus transversum ∞f, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cum Locus est Hyperbola.

Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $zz \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $zz - ff \infty \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \infty vv - ff$; atque z primùm assumpta sit pro y ♉ c, ducenda est utrinque I R parallela B E, & ∞c: quo facto, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta R Y

vel

vel RK, ejusque semi-latus transversum ∞ f, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, casu secundo §. 1. fusiùs explicata sunt.



§. 2. At si z assumpta fuerit pro $y \infty \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in

quo M A, vel quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam I R, vel eandem productam, ſi opùs ſit, interſecatur, centrum ſectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut ſupra caſu ſecundo §. 2. memoratum eſt. Nempe erit ſectionis diameter in recta S P vel S M (atque ut ibidem A M ſeu E W erat $\infty \frac{ex}{a}$, ita hîc S M ſeu E P erit $\infty \frac{ev}{a}$: cum ſit ut A B ad A M, hoc eſt, ut a ad e, ita B I, hoc eſt, v, ad S M); eritque porrò ſemi-latus tranſverſum ∞f & $\frac{ef}{a}$ reſpectivè, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut aal ad eeg, vel ut eel ad aag.

§. 3. Si denique z aſſumpta fuerit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$, erit punctum T, in quo D O, vel quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam I R, vel productam, ſi opùs ſit, interſecatur, centrum ſectionis; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & ſupra caſu ſecundo §. 3. fuſiùs expoſitum eſt. Atque eorum omnium demonſtratio in præcedentibus explicitè eſt comprehenſa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem deſignabantur per x, hîc ſint $x \; 8 \; h$, hoc eſt, v. Ita enim quod ibi erat A B & E X $\infty \; x$, hîc eſt I B & E Y $\infty \; v$; quod ibi erat D K & E X $\infty \; x$, hîc eſt R K & E Y $\infty \; v$; quod ibi erat A M & E W $\infty \frac{ex}{a}$, hîc eſt S M & E P $\infty \frac{ev}{a}$; quod ibi erat D O & E W $\infty \frac{ex}{a}$, hîc eſt T O & E P $\infty \frac{ev}{a}$.

Quamvis autem ſecundùm Regulam accidere etiam poſſit, ut v compoſita ſit ex $x \; 8$ aliâ quâdam quantitate, cui & incognita y permixta ſit; ita tamen, ut eo caſu z ſolummodo ex $y \; 8$ aliâ quantitate in totum cognitâ conſtare queat, haudquaquam tamen operæ pretium exiſtimamus, caſus omnes eò ſpectantes ſpeciatim perſequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in poſteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12[mi] & 13[tii] ſuperiùs explicata ſunt, iidem illi caſus per ſe manifeſti ſint atque in præcedentibus etiam omnino plenèque comprehendantur, ſi nimirum, ſubſtituto per omnia x loco y & vice verſâ, eadem x non per rectam A B ſed per eam, quæ ex A ipſi B E parallela ducta ſit, atque y non per B E ſed per rectam ipſi A B æquidiſtantem, deſignetur. Quòd hîc generaliter monuiſſe ſuffecerit.

Alii

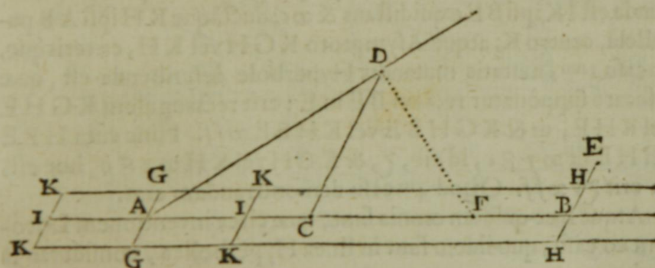
Alii quatuor casus, cùm Locus est Hyperbola.

Jam verò quod supra annotavimus accidere quoque posse, ut æquatio sit

1. $yx \infty ff$,
2. $zx \infty ff$,
3. $yv \infty ff$,
4. $zv \infty ff$;

omnibusque istis casibus Locum quæsitum esse Hyperbolam, ejus determinatio sive descriptio atque demonstratio ex iis, quæ jam ante explicata sunt, sponte quoque profluunt.

Primo enim casu, si in recta A B sumatur A C ∞f, atque ex puncto C eductâ rectâ C D, quæ ipsi B E sit æquidistans & æqualis priori A C, hoc est ∞f, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis est in recta A D, & punctum D vertex, atque A B asymptotos. sive (ductâ rectâ D F ad A D perpendiculari ac in A B terminata) erit A D semi-latus transversum, & ratio transversi ad rectum, ut A D quadratum ad D F



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole secare supponatur rectam B E in puncto E, erit [a] rectangulum A B E ∞ quadrato ex A C vel C D. Quare cum A B sit ∞x, B E ∞y, & A C ∞f: erit $xy \infty ff$. Quod primo casu erat demonstrandum.

[a] *per 3 primi hujus.*

Secundo casu, cùm nempe æquatio est $zx \infty ff$, oportet ut z juxta Regulam sit assumpta pro y 8 notâ quâdam quantitate. Esto

itaque assumpta pro y 8 c, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta AG ipsi BE parallela, ac ∞ c: sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ AB, prout c quantitas signo + vel — fuerit affecta; ductâque porrò GH ipsi AB parallelâ, centro G, Asymptoto GH, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbolæ describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam BE in puncto E, erit rectangulum GHBE vel GHE ∞ ff. Unde cum sit GH ∞ x, & HE vel HBE ∞ y 8 c, id est, z: erit GHE vel GHBE rectangulum ∞ zx, ac propterea zx ∞ ff. Quod 2do casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit yv ∞ ff: v quoque tantùm pro x 8 notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro x 8 b. Ideoque ad inventionem Loci quæsiti, in recta AB vel in ipsâ productâ sumenda est AI ∞ b, ac porrò centro I, atque Asymptoto IAB vel IB, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam BE secare supponatur in E: erit rectangulum IABE vel IBE ∞ ff. Quare cum IAB vel IB sit ∞ x 8 b, hoc est, v, & BE ∞ y: erit yv ∞ ff. Quod 3tio casu demonstrandum erat.

Denique quarto casu, si nempe æquatio sit zv ∞ ff: erit z assumpta pro y 8 c, & v pro x 8 b. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est IK ipsi BE æquidistans & ∞ c; ductâque KH ipsi AB parallelâ, centro K, atque Asymptoto KGH vel KH, cæterisque, ut casu 1mo, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam BE in E: erit rectangulum KGHE vel KHE, ut & KGHBE vel KHBE ∞ ff. Hinc cum HBE vel HE sit ∞ y 8 c, id est, z, & KGH vel KH ∞ x 8 b, hoc est, v: erit zv ∞ ff. Quod 4to casu demonstrandum erat.

Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, consideranda veniunt.

Altero autem casu generali formularum sub Nro 3. comprehensarum, cùm nempe terminus, in quo invenitur xx vel vv signo — sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz. Quo facto primò, remanente utrâque quantitate inco-

incognitâ ab initio conceptâ, sequenti formulâ se exhibebit æquatio $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$: eritque, ut in sequenti figura, describendæ Ellipseos diameter in recta A B, quæ pro x indeterminatè est concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E æquales; ac centrum in puncto A, & semi-latus transversum ∞f. id quod in dicta diametro per lineam A C vel A F exprimatur, eritque ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut l ad g. *Casus 1mus, cum Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit.*

Si enim descripta intelligatur prædicta Ellipsis, transiens per puncta C & F, secansque applicatam B E in puncto E: erit F B $\infty f + x$, & B C $\infty f - x$: ideoque rectangulum F B C $\infty ff - xx$. At cum ex natura Ellipseos, lateribus recto transversoque æqualibus, prædictum rectangulum F B C [1] sit ∞ quadrato ex B E, hoc est, yy: erit quoque proinde eo casu $yy \infty ff - xx$. Et facilè *[1] per 13 primi hujus.*

apparet, si, iisdem positis, B E super rectam F C foret quoque perpendicularis, hoc est, ut angulus quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum sit rectus, prædictam curvam fore Circuli circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus transverso rectoque inæqualibus atque

[x] *per 13 primi hujus.* atque in ratione ut l ad g, eadem ſit ratio [x] rectanguli F B C ad B E quadratum, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, ut l ad g: ex prædictis palàm eſt fore ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy, hoc eſt, eſſe $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod eo caſu demonſtrandum erat.

Caſus 2dus, cùm Locus eſt vel Ellipſis vel Circuli circumferentia. At ſi, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione ſublatâ aliâque in ejuſdem locum juxta Regulam aſſumptâ, æquatio ſit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$: aut z aſſumpta erit pro $y \; 8 \; c$, aut pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, aut pro $y \; 8 \; c \; 8 \; \frac{bx}{a}$.

§. 1. Et primùm quidem, ſi z aſſumpta fuerit pro $y \; 8 \; c$, ducenda eſt per punctum A recta A D ipſi B E parallela ac ∞c, ita ut, ſi z fuerit aſſumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus eſt angulus A B E; ſin contra z fuerit aſſumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ A B reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ D K ipſi A B parallelâ, quæ ſecet rectam B E, productam versùs B, ſi opùs fuerit, in puncto K, erit quæſitæ Ellipſeos diameter in recta D K, ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel aſſumpto angulo A B E ſeu D K E æquales. Punctum autem D centrum erit, & ſemi-latus tranſverſum ∞f. quod in dictis diametris per lineas D V & D L exprimatur, eritque ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g.

Si enim prædicta Ellipſis deſcripta intelligatur tranſiens per puncta L & V, quæ ſupponatur ſecare rectam B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E: erit K B E $\infty y + c$, & K E $\infty y - c$, ideoque eadem K B E vel K E ea ipſa, quæ pro z aſſumpta eſt. Cumque L K ſit $\infty f + x$, & K V $\infty f - x$: erit rectangulum L K V $\infty ff - xx$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli L K V ad quadratum ex K B E vel K E, hoc eſt, ad zz, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, ut l ad g: erit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad zz, hoc eſt, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. Quod quidem, ſi l ſit ∞g, idem eſt ac $zz \infty ff - xx$. Atque hîc iterum facilè apparet, quòd, exiſtente angulo D K B E vel D K E recto, & $l \infty g$, hoc eſt, rectangulo L K V ∞ K E quadrato, prædicta curva Circulus ſit futura.

§. 2. At verò, ſi z aſſumpta fuerit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, ſumpto in linea B E, pro-

productâ versùs B, si opùs fuerit, puncto M; ita ut A B ad B M sit, sicut a ad b, hoc est, ut B M sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E, sumi debet; sin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ assumpta fuerit, ab altera ejusdem lineæ A B parte sumendum est) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere N A M G, secantem rectam H C H, atque occurrentem ipsi Q F Q, quæ per prædicta puncta C & F ipsi B E ductæ sunt æquidistantes, in G & N. Quo facto, erit quæsitæ Ellipseos diameter in recta N G, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo A M E vel A M B E æquales. Porrò centrum ejusdem erit in puncto A, & semi-latus transversum erit recta A N vel A G. (quæ quidem A N vel A G, si ratio A B ad A M supponatur ut a ad e, æquabitur $\frac{ef}{a}$: cum sit ut A B ad A M, sive ut a ad e, ita A C, hoc est, f, ad A G.) Denique ratio transversi lateris ad rectum erit ut eel ad aag, id est, si l sit

∞g,

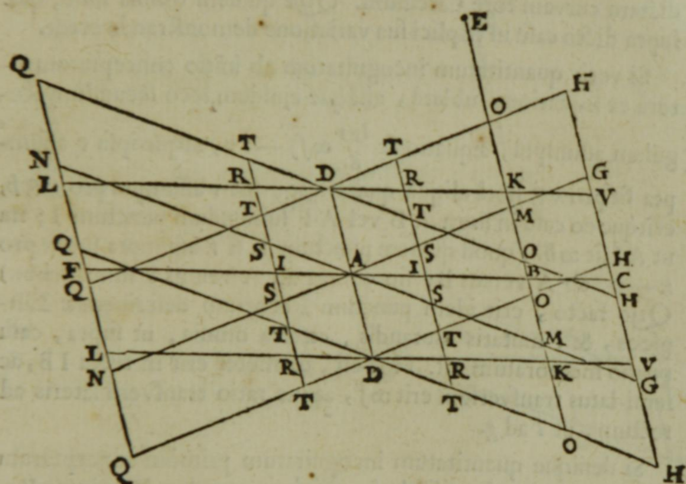
∞g, sive, quod idem est, si termino zz nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa, hoc est, ut AM quadratum ad quadratum AB.

Etenim si prædicta Ellipsis descripta intelligatur, transiens per N & G, supponaturque eandem secare rectam ME vel MBE, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E: erit eadem ME $\infty\, y - \frac{bx}{a}$, & MBE $\infty\, y + \frac{bx}{a}$, ac proinde ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque AM sit ∞ $\frac{ex}{a}$, erit NM $\infty \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & MG $\infty \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eeff}{aa} - \frac{eexx}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli NMG ad quadratum ex MBE vel ME, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, eadem quæ eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz, ac proinde $eelzz$ $\infty\, eegff - eegxx$. id est, factâ divisione per eeg, erit $\frac{lzz}{g}$ $\infty\, ff - xx$. sive, positâ $l \infty g$, $zz \infty ff - xx$. Unde ex ante dictis iterum apparet, quòd si angulus AMBE vel AME rectus sit, ac simul $eel \infty aag$, hoc est, rectangulum NMG ∞ quadrato ex ME vel MBE, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum sit A, & semi-diameter AN vel AG.

§. 3. Denique si tertiò z assumpta sit pro $y \;8\; c \;8\; \frac{bx}{a}$, ductâ, ut supra, AD ∞f, & DK ipsi AB parallelâ, sumptoque in linea KE puncto O, ita ut DK ad KO sit, sicut a ad b, hoc est, ut KO sit $\infty \frac{bx}{a}$: ducenda est per puncta D & O recta QDOH, secans prædictam HCH in H, atque occurrens præfatæ QFQ in Q. (constat autem ex iis, quæ jam sæpiùs monita sunt, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ DK, quâ datus vel assumptus est angulus DKE, sumendum esse; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum ab altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, erit describendæ Ellipseos diameter in prædicta recta QDH, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

plicatæ cum ea angulos faciant, angulo DOKE vel DOE æquales. Porrò centrum erit in D, & semi-latus transversum DQ vel DH ∞ AN seu $\frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

Si enim quæsita Ellipsis descripta intelligatur, transiens per puncta Q & H, eademque secare supponatur rectam OE vel OKE in puncto E: erit OKBE ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$, OE ∞



$y - c - \frac{bx}{a}$, OBE ∞ $y + c - \frac{bx}{a}$, & OKE ∞ $y - c + \frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro z assumptæ sunt. Cumque porrò sit DO seu AM ∞ $\frac{ex}{a}$, ideoque QO ∞ $\frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & OH ∞ $\frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: erit rectangulum QOH ∞ $\frac{eeff - eexx}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli QOH

ad quadratum ex O K B E vel O E, aut ad quadratum ex O B E vel O K E, quæ est transversi lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz; ac propterea $eelzz \infty eegff - eegxx$, &, divisis omnibus per eeg, $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. id est, si l sit ∞g, erit $zz \infty ff - xx$.

Atque hîc iterum facilè apparet, si angulus D O K B E, D O E, D O B E, vel D O K E rectus foret, & simul $eel \infty aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt, quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

Casus 3tius, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia. Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty ff - vv$, atque ipsa v assumpta sit pro x 8 notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro x 8 h, eritque eo casu in linea A B vel A F sumendum punctum I; ita ut A I sit ∞h. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta I B, ac semi-latus transversum erit ∞f, atque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit. Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$; atque z primò assumpta sit pro y 8 c, ducenda est utrinque I R, parallela ipsi

§. 1. B E, ac ∞c. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipseos, & diameter ejus in recta R K vel R L, eritque ejus semi-latus transversum ∞f, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia Casu 2do §. 1, mutatis mutandis, fusiùs explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi M A, vel,

vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opùs fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2 memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat $AM \infty \frac{ex}{a}$, ita hîc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum sit ut BA ad AM, hoc est, ut a ad e, ita BI, id est, v, ad SM:) eritque porrò semi-latus transversum $\infty \frac{ef}{a}$, & ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

§. 3. Denique si z assumpta fuerit pro y 8 c 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opùs fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac supra casu secundo §. 3

fusiùs explicatum est. Nempe erit diameter in recta T O, & semi-latus transversum $\infty \frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantùm, quòd quæ ibidem designabantur per x hîc designentur per $x \, 8 \, h$, hoc est, v. Ita enim quòd ibi erat $AB \infty x$, hîc est $IB \infty v$; quod ibi erat $DK \infty x$, hîc est $RK \infty v$; quod ibi erat $AM \infty \frac{ex}{a}$, hîc est $SM \infty \frac{ev}{a}$; & quod ibi erat $DO \infty \frac{ex}{a}$, hîc est $TO \infty \frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Loci illo casu, quo idem vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, consideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ casus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitarum in se ducta nec factum sub iisdem ad tres dimensiones ascendit, sed vel quadratum vel planum non excedit, complexi sumus.

FINIS.

FRANCISCI à SCHOOTEN,
LEIDENSIS,
dum viveret in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

TRACTATUS
DE
CONCINNANDIS DEMONSTRATIONIBUS GEOMETRICIS
ex Calculo Algebraïco.

In lucem editus
à
PETRO à SCHOOTEN,
Francisci Fratre.



AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
CIƆ IƆC LXI.

Nobilissimis & Splendidissimis Viris, Academiæ Lugdunensis Curatoribus vigilantissimis,

D. AMELIO à BOUCHORST, Wimmenumi Domino, de Ordine Equestri in Delegatos Præpotentium Hollandiæ Ordinum adscripto, & ejusdem honoratissimi Collegii Præsidi, Rhenolandiæ Aggerum Comiti, &c.

D. GERARDO SCHAEP, J. C. Cortenhoevii Domino, Exlegato ad Serenissimos Daniæ Sueciæque Reges, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Delegato, Magnificæque Reip. Amstelædamensis Exconsuli, & nunc Ærarii urbani Præfecto.

D. CORNELIO DE BEVERE, Equiti Aurato, Strevelshoeckii, West-isselmondæ, Lindæ, &c. Domino, Exlegato ad Serenissimos Magnæ Britanniæ Daniæque Reges, Exconsuli primæ in Hollandiâ Dordrechtanorum Urbis, in Concilio Præpotentium Hollandiæ Ordinum ordinario Assessori.

EORUMQUE COLLEGIS,

Amplissimis, Spectatissimisque, florentissimæ Reipublicæ Leidensis Consulibus,

D. CORNELIO à BUYTEVEST.

D. GUILHELMO PAETS, J. C. Aggerum Rhenolandiæ Chomarcho, &c.

D. PAULO à SWANENBURG, J. C. in Præpotentium fœderati Belgii Ordinum Consessu Hollandiæ nomine Delegato & Assessori.

D. RIPPARDO à GROENENDYCK, J. C.

NEC NON

Amplissimo, Consultissimoque Viro,

D. JOHANNI à WEVELINCHOVEN, J. C. Reip. Leidensis Syndico, & DD. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Nobilissimi atque Amplissimi Viri, Domini plurimum honorandi,

Geminam assequendæ veritatis methodum, quarum altera Synthesis sive Compositio dicta, altera Analysis vocata sive Resolutio, cumprimis in Mathesi à Veteribus frequentatam tritamque fuisse, palam faciunt celebria eorundem monumenta. Quorum imitari exempla cupiens meus p. m. Frater, postquam methodo Synthetica scientiæ hujus præclara multa publicis tam scriptis quam prælectionibus cum fructu tradidisset, ad Analysin quoque, certissimam inveniendi artem, ejusque perficiendæ rationem sua studia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quæ Veteribus tantum gloriæ peperissent, Analyseos beneficio ac ope reperta essent: sed quæ illi, ut inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc artificio & suppresso, vulgari tantum Syntheseos forma exhibuissent. Sed cum Veterum dissimulatione factum videret, hunc Analyticæ methodi præstantem usum non modo à multis ignorari ac negligi, sed ipsam ejus certitudinem ac evidentiam à nonnullis suspectam haberi, atque adeo soli Synthesi miserando labore inhæreretur: consultum judicavit hac peculiari diatriba ostendere, ipsum quoque Syntheticum demonstrandi modum in Analysi contineri, atque ex ea elici posse; ut eo argumento quemvis convinceret, quantum illa & prævaleat, & præferenda sit. Sed vix huic tractatui supremam imposuerat manum, cum, proh dolor, vita ejus, atque omnis reliqua de eo expectatio, intercedente fato abrupta fuit. At vero, ut posthumus idem atque novissimus industriæ ejus fœtus in publicam lucem, cui destinatus erat, rite & honeste prodire posset: ego, ut defun-

cti

cti frater unicus, mei esse officii atque pietatis existimavi, non tantum in me recipere editionis promovendæ ac juvandæ curam; sed etiam pro veneratione & observantia, quæ vobis, Nobilissimi atque Amplissimi Domini, jure multiplici debetur, eundem fœtum inclytæ dignitati vestræ ac honori consecrare. Utique futurum spero, ut cujus ingenii primitias, illustribus vestris nominibus olim inscriptas, propitia benignitate excepistis, hunc quoque ultimum ejusdem fructum gratiose suscipiatis. Neque solita humanitas vestra obstare sinet meam offerentis tenuitatem, qui simul hoc quantulocunque conatu pro vestris non modo in Fratrem, sed etiam in p. m. Parentem meum, longi temporis beneficiis meritisque gratum animum profiteri ac testari exoptem. Quod quidem pro illis, meque ipso, luculentius aliquando me facturum confido, si & mihi, à prima ætate similibus studiis innutrito, benevolentiæ & favoris vestri auram aspirare contingat. Interim DEUM OPT. MAX. suppliciter oro, ut consilia vestra & pro Reip. salute atque Academiæ decore curas secundet, optimisque successibus donet.

Vestrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

PETRUS à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

Tractatus

De concinnandis Demonſtrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

LECTORI S.

Quoniam, quæ in Tractatu hoc docentur, evidentiùs per exempla quàm præcepta explicari atque intelligi poſſunt: ſufficere judicavi variis diverſorum generum exemplis rem apertiſſimè exponere, candidéque impertiri. Vale.

PROBLEMA.

Datam rectam AB, utcunque ſectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum ſub AD, DB comprehenſum æquetur quadrato rectæ CD. *Vide ſequentem figuram.*

Series *Analyſeos* ſive *Reſolutionis.*

Suppoſito Problemate ut jam facto,
voco AC. a
CB. b
& BD vel DE. x: eritque AD. $a+b+x$, & CD. $b+x$.

Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico AD. $a+b+x$
per BD vel DE. x

Eritque rectangulum ſub AD, DB comprehenſum, hoc eſt, ▭ ADEF. $ax+bx+xx$.

Similiter, multiplico CD. $b + x$
per CD vel DG. $b + x$

$$\begin{array}{r} + \; bx + xx \\ bb + bx \end{array}$$

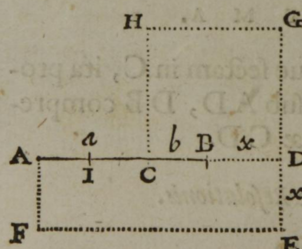
Et fit quadratum ex CD, hoc eſt, □ CDGH. $bb + 2bx + xx.$

Unde talis emergit æquatio
$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx.$

Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx,
eritque $ax \propto bb + bx$. †

Deinde transferatur bx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una & cognitæ ab altera parte habeantur,
& fit $ax - bx \propto bb$.

Cujus utraque pars ſi dividatur per $a - b$,
invenietur $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a - b$ ad b, ita b ad x.



Id quod docet, ad producendam AB uſque ad D, qualis requiritur, ſumendam eſſe CI æqualem CB, ita ut AI ſit $\propto a - b$; ac deinde ad AI & IC vel CB, hoc eſt, ad $a - b$ & b, eſſe inveniendam 3[tiam] proportionalem BD.

Unde tale formari poterit Theorema, ſupponendo rectangulum ADB quadrato ex CD æquale eſſe.

Si AB producatur ad D, ita ut rectangulum ADB ſit æquale quadrato ex CD: erit AC major quàm CB, & exceſſus AI ad IC vel CB eandem habebit rationem, quam CB ad BD.

Cujus demonſtratio eodem ordine procedit quo Analyſis, ſequendo nimirum ejuſdem veſtigia, hoc pacto:

Cum

Cum enim ex hypothesi ▭ A D B sit æquale □to ex C D,

$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx$

ablato utrinque ▭lo sub C D & D B,

$bx + xx$

erit [a] ▭ sub A C & D B æquale ▭lo sub C D & C B [b].

$ax \propto bb + bx.$

Rursus auferatur utrinque ▭ sub I C vel C B & B D, id est, bx,

eritque [c] ▭ sub A I & B D æquale □to ex C B [d].

$ax - bx \propto bb.$

Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit [e]
ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D.

$a-b$ —— b ——— b / x. Quod erat propositum.

a per 1 secundi.
b per 2 secundi.
c per 1 secundi.
d per 3 secundi.
e per 17 sexti.

Quoniam autem præstare videtur, loco horum æqualium rectangulorum considerare laterum proportionem, quandoquidem in demonstrationibus Geometricis, ubi hæ æqualitates vel proportiones schematum contemplationi insuper sunt astringendæ, linearum hæc inter se collatio simplicior est censenda quàm planorum aut solidorum, ipsaq; etiam figuras requirit minùs intricatas, vel saltem ratiocinationes, quæ circa illas fiunt, magis liberas reddit: idcirco convertenda erit æqualitas in proportionem atque hæc eòusque continuanda varièq; transmutanda, utendo sc. ad id modis argumentandi libro 5to Elementorum expositis, donec appareat quæsitum ex tribus prioribus proportionis terminis constare seu inveniri posse. Quod ipsum ut rectiùs percipiatur, visum nobis fuit aliam præcedentis Theorematis demonstrationem hîc afferre, qualis illa à principio usque ad finem per proportionalia procedit, & prioribus æqualitatibus ad amussim respondet.

Etenim cum ex hypothesi sit

▭ A D B æquale □to ex C D:

$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx$:

f per 17 sexti. Erit [f], resolvendo æqualitatem in proportionem,

ut AD ad CD, ita CD ad BD.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ / x.

Hinc cum sit

ut totum AD ad totum CD,

$a+b+x$ —— $b+x$

ita ablatum CD ad ablatum BD:

$b+x$ —— x

g per 19 quinti. erit etiam [g]

reliquum AC ad reliquum CB, ut ablatum CD ad ablatum BD.

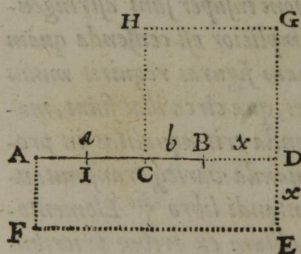
a —— b —— $b+x$ / x.

h per 17 quinti. Et dividendo [h]

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD

$a-b$ —— b —— b / x. ut proponebatur.

Hinc, ut Problemati huic sit locus, patet, rectam AC ipsâ CB debere esse majorem; atque adeò hanc conditionem Problemati esse præfigendam, cum sine eâ constare nequeat, si velimus ut quæsitum ex datis inveniatur, utpote ad quod obtinendum BC ex CA est subtrahenda.



Idem etiam liquet, supponendo AC æqualem aut minorem quàm CB. Nam AC æquali existente ipsi CB, non posset rectangulum ADB quadrato ex CD æquale esse: cum illud [i] unà cum quadrato ex CB ei tantùm æquale existat. Et quidem si AC ipsâ CB minor sit, manifestum est, rectangulum ADB quadrato ex CD tunc adhuc multò minus fore.

i per 6 secundi.

Cum igitur constet Determinatio, Problema construetur hoc modo:

Constructio.

Assumptâ CI æquali CB, si fiat ut reliqua AI ad IC vel CB, ita CB ad BD: dico rectangulum ADEF,

quod

quod sub AD & DB seu DE comprehenditur, æquale esse quadrato CDGH, à recta CD descripto.

Quod ipsum retrogrado ordine fit manifestum, incipiendo ab Analyseos fine & per ejusdem vestigia redeundo ad illius principium.

Finis *Compositionis*.

NOTA Hujus atque sequentium Problematum Compositiones retro legendas esse.

habebitur k

▭ sub AD & DB seu ADEF æquale □to ex CD seu CDGH l.
$ax + bx + xx$ ∞ $bb + 2bx + xx$.

Quod erat faciendum.

k *per* 1 *secundi*.
l *per* 2 *secundi*.
m *per* 1 *secundi*.
n *per* 3 *secundi*.

Rursus addito utrinque ▭lo sub CD & DB, id est, $bx + xx$,

fiet m ▭ sub AC & DB æquale ▭lo sub CD & CB n.
ax ∞ $bb + bx$.

Deinde addito utrinque ▭lo sub IC vel CB & BD, id est, bx, ut in alteram transeat partem,

erit o ▭ sub AI & BD æquale □to ex CB.
$ax - bx$ ∞ bb.

o *per* 17 *sexti*.

revocatâ proportione ad æqualitatem,

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD:
$a - b$ —— b —— b / x

Etenim cum ex Constructione sit

Principium *Compositionis*.

Alia ejusdem Problematis Compositio, per vestigia proportionalium secundæ Resolutionis regrediens.

Finis *Compositionis*.

erit p ▭ sub AD & BD seu ADEF æquale □to ex CD seu CDGH.
$ax + bx + xx$ ∞ $bb + 2bx + xx$.

p *per* 17 *sexti*.

Quod erat faciendum.

id est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

q per 12 quinti. erit etiam [q]

ut AD summa antec. ad CD summã conſ., ita CD una antec. ad BD unam conſeq.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ —— x

ita C D anteced. ad B D conſequentem:

$b+x$ —— x

Hinc cum ſit ut A C antec. ad C B conſeq.,

a —— b

ut A C ad C B, ita C D ad B D.

a —— b —— $b+x$ / x.

r per 18 quinti. erit componendo [r]

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

$a-b$ —— b —— b / x

Cum enim ex conſtructione ſit

Principium *Compoſitionis*

His igitur ita ſe habentibus, ſi velimus, ut, neglecto artificio, quo tum Conſtructio Problematis, tum ejus demonſtratio fuit inventa, tantummodo conſtet, allatâ Conſtructione quæſitum ſemper obtineri: poterimus, calculi veſtigiis nunc prætermiſſis, hujuſmodi ad id afferre demonſtrationem.

Demonſtratio.

Cum enim ex conſtructione A I ſit ad I C vel C B, ſicut C B ad B D: erit [s] rectangulum ſub extremis A I & B D æquale quadrato mediæ C B. Quibus ſi addatur commune rectangulum ſub I C vel C B & B D, erit & [t] rectangulum ſub A C & B D [u] æquale rectangulo ſub C D & C B. His igitur ſi rurſus addatur commune rectangulum ſub C D & D B, erit ſimiliter [x] rectangulum ſub A D & D B ſeu A D E F [y] æquale quadrato ex C D. Quod erat faciendum.

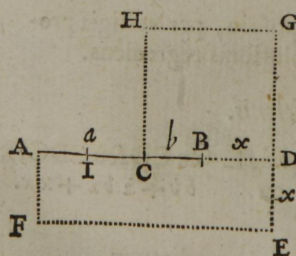
s per 17 ſexti.

t per 1 ſecundi.

u per 3 ſecundi.

x per 1 ſecundi.

y per 2 ſecundi.



Vel

Vel etiam sic:

Cum ex constructione A I sit ad I C vel C B, sicut C B ad B D; erit componendo [a] A C ad C B, sicut C D ad B D. Sed ut una antecedentium C D ad unam consequentium B D, ita sunt [b] antecedentes A C & C D simul, id est, tota A D, ad consequentes C B & B D simul, id est, ad totam C D. Æqualia igitur sunt [c] quadratum C D & rectangulum A D B. Quod erat faciendum.

a per 18 quinti.
b per 12. quinti.
c per 17 sexti.

Quoniam itaque Problemate ad æquationem perducto Algebræ munus est eam deinde juxta certas regulas transmutare, servando semper æqualitatem, sic ut tandem constet, quo pacto illius ope quæsita quantitas ex datis inveniri possit: non inconveniens duxi, si unà hic ostenderem, quibus modis aliquot illius usitatiores transmutationes in proportiones resolvi queant, cum hæ, ut supra monitum fuit, in Problematis Geometricè resolvendis ac in Theorematis solito more demonstrandis, concinniores sint judicandæ; præsertim ubi eadem æqualitas ad tres pluresve dimensiones ascendit, atque idcirco illa cuique minùs obvia est, quâ ratione per Geometriæ Elementa sit explicanda.

Typus aliquot æquationum, secundùm Algebræ leges reductarum, & earundem in proportiones correspondentes resolutio; tam ad Problematum Resolutiones Geometricas ex calculo eliciendas, quàm ad Theorematum Demonstrationes ex eodem componendas, utilis.

Reductiones Algebraïcæ	*Resolutiones Geometricæ.*	
Si fuerit $ax \infty bc$: dividatur utrinque per a fit $x \infty \frac{bc}{a}$.	erit [d] ut a ad b, ita c ad x. vel permutatim ut a ad c, ita b ad x.	d per 16 sexti.
Si sit $ax + bx \infty cd$: dividatur utrinque per $a + b$ fit $x \infty \frac{cd}{a + b}$.	erit [e] ut $a + b$ ad c, ita d ad x. vel permutatim ut $a + b$ ad d, ita c ad x.	e per 16 sexti.

Si

f *per* 16 *sexti.*

Si sit $a x \infty b c \, 8 \, d c$:
dividatur utrinque per a
fit $x \infty \frac{b c \, 8 \, d c}{a}$.

erit [f] ut a ad $b \, 8 \, d$, ita c ad x.
vel permutatim
ut a ad c, ita $b \, 8 \, d$ ad x.

g *per* 16 *sexti.*

Si sit $a x \, 8 \, b x \infty c d \, 8 \, e d$:
dividatur utrinque per $a \, 8 \, b$
fit $x \infty \frac{c d \, 8 \, e d}{a \, 8 \, b}$.

erit [g] ut $a \, 8 \, b$ ad $c \, 8 \, e$, ita d ad x.
vel permutatim
ut $a \, 8 \, b$ ad d, ita $c \, 8 \, e$ ad x.

h *per* 16 *sexti.*

Si sit $a x \infty b b - c c$:
dividatur utrinque per a
fit $x \infty \frac{b b - c c}{a}$.

erit [h] ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x.
vel permutatim
ut a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x.

i *per* 16 *sexti.*
* Ut supra ad notam †
k *per* 17 *quinti.*

Si sit $a x \infty b b + b x$: *
auferatur utrinque $b x$
eritque $a x - b x \infty b b$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \infty \frac{b b}{a - b}$.

erit [i] ut a ad b, ita $b + x$ ad x.
& dividendo [k]
ut $a - b$ ad b, ita b ad x.

l *per* 16 *sexti.*
m *per* 18 *quinti.*

Si sit $a x \infty b b - b x$:
addatur utrinque $b x$
eritque $a x + b x \infty b b$.
dividatur utrinque per $a + b$
fit $x \infty \frac{b b}{a + b}$.

erit [l] ut a ad b, ita $b - x$ ad x.
& componendo [m]
ut $a + b$ ad b, ita b ad x.

n *per* 16 *sexti.*
o *per* 17 *quinti.*
p *vide Clavium ad* 18 *quinti.*

Si sit $a x - a c \infty b x$:
addito utrinque $a c$
erit $a x \infty b x + a c$.
auferatur utrinque $b x$
eritque $a x - b x \infty a c$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \infty \frac{a c}{a - b}$.

erit [n] ut a ad b, ita x ad $x - c$.
& dividendo [o]
ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.
& per compositionem rationis contrariam [p]
ut $a - b$ ad a, ita c ad x.

q *per* 16 *sexti.*
r *per* 17 *quinti.*

Si sit $a x - a c \infty b x + b c$:
addito utrinque $a c$
erit $a x \infty b x + b c + a c$.
auferatur utrinque $b x$
eritque $a x - b x \infty b c + a c$.

erit [q] ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$. &
& dividendo [r]
ut $a - b$ ad b, ita $2 c$ ad $x - c$.
Ubi liquet, etiamsi 4tus hic terminus proportionalis quantita-

tem

dividatur utrinque per $a - b$

fit $x \infty \frac{bc + ac}{a - b}$.

Si sit $ac + ax \infty bc - bx$:

addito utrinque bx

erit $ac + ax + bx \infty bc$.

auferatur utrinque ac

eritque $ax + bx \infty bc - ac$.

dividatur utrinque per $a + b$

fit $x \infty \frac{bc - ac}{a + b}$.

tem quæsitam x seorsim non exhibeat, ipsam tamen ex tribus prioribus, qui quidem omnes sunt cogniti, inveniri posse. Id quod similiter de præcedenti ac sequenti formula aliisque est intelligendum.

At verò si ipsa x quarto loco separatim desideretur, licebit ulteriùs sic argumentari.

α Haud secus, cum sit

ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$,

erit invertendo [a] — a per Coroll. 4 quinti.

ut b ad a, ita $x - c$ ad $x + c$.

& per compositionem rationis contrariam [b] — b vide Clavium ad 18 quinti.

ut b ad $b + a$, ita $x - c$ ad $2x$.

Hinc cum $a - b$ —— b .... $b + a$

sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c$ —— $x - c$ .... $2x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [c] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, — c per 22 quinti.

$a - b$ ad $b + a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x.[d] — d per 15 quinti.

erit[e] ut a ad b, ita $c - x$ ad $c + x$. α — e per 16 sexti.

& componendo [f] — f per 18 quinti.

ut $a + b$ ad b, ita $2c$ ad $c + x$.

Rursus cum sit

α ut a ad b, ita $c - x$ ad $c + x$,

erit invertendo [g] — g per Coroll. 4 quinti.

ut b ad a, ita $c + x$ ad $c - x$.

& per conversionem rationis [h] — h per Coroll. 19 quinti.

ut b ad $b - a$, ita $c + x$ ad $2x$.

Hinc cum $a+b$ —— b .... $b-a$
ſint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $c+x$ .... $2x$
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt ordinata: erunt ipſæ quoque [i] ex æqualitate in eadem ratione, hoc eſt,

i per 22 quinti.

$a+b$ ad $b-a$, ſicut $2c$ ad $2x$ ſeu c ad x. [k]

k per 15 quinti.

l per 16 ſexti.

m per 17 quinti.

Si ſit $ax+ac \infty bx-bc$:
addito utrinque bc
erit $ax+ac+bc \infty bx$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac+bc \infty bx-ax$.
dividatur utrinque per $b-a$
fit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$.

erit [l] ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$. α
& dividendo [m]
ut $b-a$ ad a, ita $2c$ ad $x-c$.
Rurſus cum ſit
α ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$,
erit invertendo [n]
ut a ad b, ita $x-c$ ad $x+c$.
& per compoſitionem rationis contrariam [o]
ut a ad $a+b$, ita $x-c$ ad $2x$.

n per Coroll. 4 quinti.

o vide Clavium ad 18 quinti.

Hinc cum $b-a$ —— a ...... $a+b$
ſint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $x-c$ ...... $2x$,
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt ordinata: erunt ipſæ quoque [p] ex æqualitate in eadem ratione, hoc eſt,

p per 22 quinti.

$b-a$ ad $a+b$, ſicut $2c$ ad $2x$ ſeu c ad x. [q]

q per 15 quinti.

r per 16 ſexti.

s per 18 quinti.

Si ſit $ac-ax \infty bx+bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty bx+ax+bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ac-bc \infty bx+ax$.
dividatur utrinque per $b+a$
fit $\frac{ac-bc}{b+a} \infty x$.

erit [r] ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$. α
& componendo [s]
ut $b+a$ ad a, ita $2c$ ad $x+c$.
Rurſus cum ſit
α ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$,
erit invertendo [t]
ut a ad b, ita $x+c$ ad $c-x$.
& per converſionem rationis [u]
ut a ad $a-b$, ita $x+c$ ad $2x$.

t per Coroll. 4 quinti.

u per Coroll. 19 quinti.

Hinc

Hinc cum $b+a$ —— a ..... $a-b$ sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c$ —— $x+c$ ..... $2x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [a] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,

a per 22 quinti.

$b+a$ ad $a-b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x. [b]

b per 15 quinti.

Si sit $ax - ac \infty bc - bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \infty bc + ac - bx$.
addatur utrinque bx
eritq; $ax + bx \infty bc + ac$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $x \infty c$.

erit [c] ut a ad b, ita $c-x$ ad $x-c$. Unde concluditur c esse ∞ x. Nam minor esse non potest, quoniam componendo [d] foret, ut $a+b$ ad b, ita o ad $x-c$. quod est absurdum. Similiter major esse nequit, quandoquidem per compositionem rationis contrariam [e] foret ut a ad $a+b$, ita $c-x$ ad o. quod perinde absurdum est. Nec aliter se res habet in sequenti formula.

c per 16 sexti.

d per 18 quinti.

e vide Clavium ad 18 quinti.

Si sit $ac - ax \infty bx - bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty ax + bx - bc$.
addatur utrinque bc
eritq; $ac + bc \infty ax + bx$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $c \infty x$.

erit [f] ut a ad b, ita $x-c$ ad $c-x$. Unde rursus ut ante concluditur c esse ∞ x: cum nec major nec minor esse possit.

f per 16 sexti.

Cum igitur in resolvendo Problemate appareat, supponendo illud ipsum ut jam factum, quo pacto quis argumentari possit, ut id quod in eo quæritur ex datis inveniat: ritè me facturum judicavi, si ulteriùs hîc ostenderem, quâ ratione præcedentium reductionum vestigiis insistendo per illa eadem retrogradi liceat, ad æquationes propositas, quas ipsius Problematis conditiones adimplere suppono, Geometricè componendas.

Typus veſtigiorum, juxta quæ æquationes ſuperiùs reductæ ac reſolutæ rurſus componuntur, initium faciendo à fine reductionis & per eadem veſtigia regrediendo; ad Compoſitiones Geometricas ex calculo eruendas utilis.

Compoſitiones Algebräicæ — *Compoſitiones Geometricæ*

a *per* 16 *ſexti.*

fit $a x \infty b c$. — erit [a] $a x \infty b c$.

multiplicetur utrinque per a — facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si fuerit $x \infty \frac{bc}{a}$: h. e., ſi ſit ut a ad b, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita b ad x:

b *per* 16 *ſexti.*

fit $a x \, 8 \, b x \infty c d$. — erit [b] $a x \, 8 \, b x \infty c d$.

multiplicetur utrinque per $a \, 8 \, b$ — facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si ſit $x \infty \frac{cd}{a \, 8 \, b}$: h.e., ſi ſit ut $a \, 8 \, b$ ad c, ita d ad x; vel permutatim $a \, 8 \, b$ ad d, ita c ad x:

c *per* 16 *ſexti.*

fit $a x \infty b c \, 8 \, d c$. — erit [c] $a x \infty b c \, 8 \, d c$.

multiplicetur utrinque per a — facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si ſit $x \infty \frac{bc \, 8 \, dc}{a}$: h. e., ſi ſit ut a ad $b \, 8 \, d$, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita $b \, 8 \, d$ ad x:

d *per* 16 *ſexti.*

fit $a x \, 8 \, b x \infty c d \, 8 \, e d$. — erit [d] $a x \, 8 \, b x \infty c d \, 8 \, e d$.

multiplicetur per $a \, 8 \, b$ — facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si ſit $x \infty \frac{cd \, 8 \, ed}{a \, 8 \, b}$: h. e., ſi ſit ut $a \, 8 \, b$ ad $c \, 8 \, e$, ita d ad x; vel permutatim $a \, 8 \, b$ ad d, ita $c \, 8 \, e$ ad x:

e *per* 16 *ſexti.*

fit $a x \infty b b - c c$. — erit [e] $a x \infty b b - c c$.

multiplicetur utrinque per a — facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si ſit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$: h. e., ſi ſit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + x$ ad x:

fit

fit $ax \infty bb + bx$.
addatur utrinque bx
eritque $ax - bx \infty bb$.
multiplicetur utrinq; per $a - b$

erit [f] $ax \infty bb + bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita $b + x$ ad x.
erit componendo [g]

Si sit $x \infty \frac{bb}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad b, ita b ad x: ‡

f *per* 16 *sexti.*
g *per* 18 *quinti.* Ut supra ad notam ‡

fit $ax \infty bb - bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax + bx \infty bb$.
multiplicetur utrinq; per $a + b$

erit [h] $ax \infty bb - bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita $b - x$ ad x.
erit dividendo [i]

Si sit $x \infty \frac{bb}{a+b}$: hoc est, si sit ut $a + b$ ad b, ita b ad x:

h *per* 16 *sexti.*
i *per* 17 *quinti.*

fit $ax - ac \infty bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \infty bx + ac$.
addatur utrinque bx
erit $ax - bx \infty ac$.
multiplicato utrinq; per $a - b$

erit [k] $ax - ac \infty bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita x ad $x - c$.
& componendo [l]
ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.
erit per divisionem rationis contrariam [m]

Si sit $x \infty \frac{ac}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad a, ita c ad x:

k *per* 16 *sexti.*
l *per* 18 *quinti.*
m *vide Clavium ad* 17 *quinti.*

fit $ax - ac \infty bx + bc$.
auferatur utrinque ac.
eritque $ax \infty bx + bc + ac$.
addatur utrinque bx
erit $ax - bx \infty bc + ac$.

erit [n] $ax - ac \infty bx + bc$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$
& componendo [o]
ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [p]
ut $a - b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.
id est, per divisionem rationis contrariam, [q]

n *per* 16 *sexti.*
o *per* 18 *quinti.*
p *vide Clavium ad* 22 *quinti.*
q *vide Clavium ad* 17 *quinti.*

r per 15 quinti.

multiplicato utrinq; per $a-b$ ut $a-b$ ad $b+a$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [r]

Si sit $x \infty \frac{bc+ac}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a-b$ ad $b+a$, ita c ad x:

s per 16 sexti.

erit [s] $ac+ax \infty bc-bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$.

t per 17 quinti.

& dividendo [t]
ut $a+b$ ad b, ita $2c$ ad $c+x$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [u]

u vide Clavium ad 22 quinti.

x vide Clavium ad 18 quinti.

y per 15 quinti.

fit $ac+ax \infty bc-bx$.
auferatur utrinque bx ut $a+b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2c+2x$.
eritque $ac+ax+bx \infty bc$. id est, per compositionem rationis contrariam, [x]
addatur utrinque ac
erit $ax+bx \infty bc-ac$. ut $a+b$ ad $b-a$, ita $2c$ ad $2x$.
multiplicato utrinq; per $a+b$ erit etiam [y]

Si sit $x \infty \frac{bc-ac}{a+b}$: hoc est, si sit ut $a+b$ ad $b-a$, ita c ad x:

z per 16 sexti.

erit [z] $ax+ac \infty bx-bc$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$.

a per 18 quinti.

& componendo [a]
ut $b-a$ ad a, ita $2c$ ad $x-c$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [b]

b vide Clavium ad 22 quinti.

c vide Clavium ad 17 quinti.

d per 15 quinti.

fit $ax+ac \infty bx-bc$.
auferatur utrinque bc ut $b-a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x-2c$.
eritque $ax+ac+bc \infty bx$. id est, per divisionem rationis contrariam, [c]
addatur utrinque ax
erit $ac+bc \infty bx-ax$. ut $b-a$ ad $a+b$, ita $2c$ ad $2x$.
multiplicato utrinq; per $b-a$ erit etiam [d]

Si sit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$: hoc est, si sit ut $b-a$ ad $a+b$, ita c ad x:

fit

erit [e] $ac - ax \infty bx + bc$. [c per 16 sexti.]
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut b ad a, ita $c - x$ ad $x + c$.
& dividendo [f] [f per 17 quinti.]
ut $b + a$ ad a, ita $2c$ ad $x + c$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [g] [g vide Clavium ad 22 quinti.]
ut $b + a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x + 2c$.
id est, per compositionem rationis contrariam, [h] [h vide Clavium ad 18 quinti.]
ut $b + a$ ad $a - b$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [i] [i per 15 quinti.]

fit $ac - ax \infty bx + bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty bx + ax + bc$.
addatur utrinque bc
erit $ac - bc \infty bx + ax$.
multiplicato utrinq; per $b + a$

Si sit $\frac{ac - bc}{b + a} \infty x$: hoc est, si sit ut $b + a$ ad $a - b$, ita c ad x:

fit $ax - ac \infty bc - bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \infty bc + ac - bx$.
auferatur utrinque bx
erit $ax + bx \infty bc + ac$.
multiplicato utrinque per $a + b$

Si sit $x \infty c$: seu, quod idem est, si x sit ad c, sicut $a + b$ ad $a + b$:

fit $ac - ax \infty bx - bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty ax + bx - bc$.
auferatur utrinque bc
erit $ac + bc \infty ax + bx$.
multiplicato utrinque per $a + b$

Si sit $c \infty x$: seu, quod idem est, si c sit ad x, sicut $a + b$ ad $a + b$:

Cum in duabus præcedentibus formulis non occurrat quâ viâ per proportionales, ut ante, ad æquationes priores perveniatur: licebit per æqualitatem procedere, æqualia per æqualia multiplicando, ac deinde ab æqualibus æqualia auferendo, omnino ut in Compositionibus hisce Algebraicis factum est.

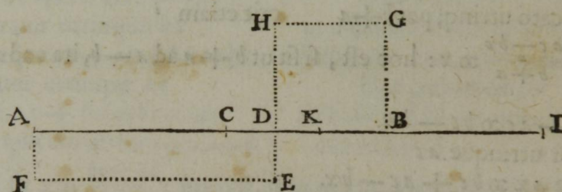
PRO-

PROBLEMA.

Datam rectam AB, utcunque sectam in C, rursus secare in D; ita ut rectangulum sub AD, DC comprehensum sit æquale quadrato ex DB.

Series *Analyseos* sive *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam facto,
voco AC. a
CB. b
& CD. x; eritque AD ∞ $a+x$, & DB ∞ $b-x$.



Deinde ut habeatur æquatio,
Multiplico AD. $a + x$
per DC seu DE. x
Et fit rectangulum ADEF. $ax + xx$.

Similiter multiplico DB. $b - x$
per DB seu BG. $b - x$
$- bx + xx$
$bb - bx$
Et fit quadratum DBGH. $bb - 2bx + xx$.

Unde talis exurgit æquatio
$ax + xx$ ∞ $bb - 2bx + xx$.

Ad quam reducendam tollatur utrinque xx,
eritque ax ∞ $bb - 2bx$.

Deinde transferatur $2bx$ ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur, & cognitæ ab altera parte, & fit $ax + 2bx$ ∞ bb.

Cujus

Cujus utraque pars ſi dividatur per $a+2b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a+2b}$. Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a+2b$ ad b, ita b ad x.

Id quod docet, ad ſecandam A B in D, qualis requiritur, producendam eſſe A B ad I, ita ut B I ſit æqualis B C; ac deinde ad A I & I B vel B C inveniendam eſſe 3^{tiam} proportionalem, hoc eſt, ut A I ſit ad I B vel B C, ſicut B C ad C D.

Ut autem pateat demonſtratio, repetantur Analyſeos veſtigia. Si enim per hæc ipſa regrediamur, incipiendo ab ejus fine & deſinendo ubi illa initium ſumpſit, inventa ſimul erit via à dato ſeu conceſſo perveniendi ad quæſitum. In quem igitur finem binas ſequentes compoſitiones, quarum altera Algebræ, altera Geometriæ genuina eſt, ob oculos ponere viſum fuit, adhibitâ utriuſque calculi interpretatione ſive ad figuram relatione.

Compoſitio Algebraïca. *Compoſitio Geometrica.*

Finis *Compoſitionis.*

Compoſitio Algebraïca.

▭ A D, C D vel A D E F

& fit [a] $ax+xx \propto$

□ D B vel D B G H.

[b] $bb-2bx+xx$.

□ C D vel D K

Addatur utrinque xx,

▭ A C, C D

eritque [c] $ax \propto$

(□DB--□CD vel DK) i, e.[d], ▭CBK

$bb-2bx$.

▭CI, CD vel [e] ▭CDI+□CD

Auferatur utrinque $2bx$,

▭AI, CD □IB vel BC

erit [f] $ax+2bx \propto bb$.

Compoſitio Geometrica.

▭ A D, C D vel A D E F

Et fit, *per 3. 2^{di},* $ax+xx \propto$

□ D B vel D B G H.

$bb-2bx+xx$. *per 6. 2^{di}.*

□ C D vel D K

Addatur utrinque xx

▭ A C D ▭ C B K

erit, *per 16. 6^{ti},* $ax \propto bb-2bx$.

Id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem,

A C C B B K K D vel C D

ut a ad b, ita $b-2x$ ad x.

Et, ſumptis conſequentium ſemiſſibus, *vide Clavium ad 22. 5^{ti}.*

A C C I B K K C

ut a ad $2b$, ita $b-2x$ ad $2x$.

Unde dividendo erit, *per 17 quinti.*

A I I C B C 2 C D vel C K

ut $a+2b$ ad $2b$, ita b ad $2x$.

a *per 3 ſecundi.*
b *per 6 ſecundi.*
c *per 5 ſecundi.*
d *per 1 ſecundi.*
e *per 3 ſecundi.*
f *per 17 ſexti.*

id est, reductâ proportione ad æqualitatem, | sive, sumptis consequentium duplis, *vide Clavium ad 22. 5ti.*

AI IB BC CD

Ex constructione est, ut $a + 2b$ ad b, ita b ad x.

Principium *Compositionis.*

Adapertâ itaque tum ad Constructionem tum ad Demonstrationem viâ, licebit Problema construere atque dupliciter demonstrare, ut sequitur.

Constructio.

Productâ AB ad I, donec BI sit æqualis BC, fiat ut AI ad IB vel BC, ita BC ad CD: dico rectangulum ADC seu ADEF quadrato DB seu DBGH æquale esse.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione AI sit ad IB vel BC, ut BC ad CD: erit [g] rectangulum sub extremis AI, CD, id est, [h] rectangulum sub AC, CD unà cum rectangulo sub CI, CD, æquale quadrato mediæ IB vel BC. A quibus si commune aufe-

g *per 17 sexti.*
h *per 1 secundi.*



ratur rectangulum sub CI, CD: erit reliquum rectangulum sub AC, CD æquale BC quadrato, dempto eidem rectangulo sub CI, CD, id est, [i] rectangulo CDI unà cum quadrato CD. At cum dempto CDI rectangulo à quadrato CB vel BI [k] relinquatur quadratum DB: patet dictum rectangulum ACD quadrato DB æquale esse minus quadrato CD. Hinc cum, sumendo

i *per 3 secundi.*
k *per 5 secundi.*

mendo C D & D K æquales, quadratum D B minus quadrato C D vel D K [l] æquale sit rectangulo C B K: manifestum est, si æqualibus hisce rectangulis A C D & C B K addatur commune quadratum C D vel D K, etiam totum toti æquale esse, id est, [m] rectangulum A D C seu A D E F ipsi D B quadrato seu D B G H. Quod erat faciendum.

l per 6 secundi.
m per 3 secundi.

Vel sic:

Cum ex constructione sit ut A I ad I B, ita B C ad C D: erit quoque, sumptis consequentium duplis, [n] ut A I ad I C, ita B C ad 2 C D seu C K; & dividendo [o] ut A C ad C I, ita B K ad K C; id est, sumptis consequentium semissibus, [p] ut A C ad C B, ita B K ad K D vel C D. Æquale igitur est [q] rectangulum sub extremis A C, C D rectangulo sub mediis C B, B K. Quibus si addatur commune quadratum C D vel D K, erit & totum toti æquale, id est, [r] rectangulum A D C seu A D E F ipsi quadrato D B seu D B G H [s]. Quod erat faciendum.

n vide Clavium ad 22 quinti.
o per 17 quinti.
p vide Clavium ad 22 quinti.
q per 16 sexti.
r per 3 secundi.
s per 6 secundi.

PROBLEMA.

Datâ rectâ AB utcunque sectâ in C, erectâque ex ejus termino B super ipsa perpendiculari indefinitâ B D: ex altero ejus termino A rectam lineam ducere A D, huic occurrentem in D; ita ut ipsa æqualis sit rectis D B, B C simul sumptis.

Series *Analyseos*.

Ponatur factum quod quæritur,
sitque A B ∞ a
C B ∞ b
& B D ∞ x: eritque
A D ∞ $b + x$.

Hinc cum angulus ad B sit rectus, erit [a] quadratum ex A D æquale binis quadratis ex A B & B D.

a per 47 primi.

Unde talis resultat æquatio

□AD □AB+□BD

$bb + 2bx + xx \infty aa + xx.$

Ad quam reducendam, tollatur utrinque xx,

eritque $bb + 2bx \infty aa$.

Deinde transferatur bb ad alteram partem, ut incognita quantitas ab una parte habeatur & reliquæ ab altera parte,

& fit $2bx \infty aa - bb$.

Cujus utraque pars si dividatur per $2b$,

obtinebitur $x \infty \frac{aa - bb}{2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $2b$ ad $a + b$, ita $a - b$ ad x.

Quod ipsum docet, ad Problema hoc solvendum, prout BE in directum ipsius AB sumpta est æqualis BC, opùs tantùm esse, ad CE, AE, & AC invenire 4^{tam} proportionalem BD.

Ad inveniendam autem demonstrationem, fiat repetitio vestigiorum Analyseos, incipiendo ab ejus fine & per eadem vestigia progrediendo usque ad ipsius initium; ita videlicet, ut quod in Analysi seu Resolutione addendum præcipitur, id in Synthesi seu Compositione subtrahatur, & contra: cum Analysis & Synthesis directè omnino sibi invicem opponantur.

Finis *Compositionis*.

Unde & ipsæ rectæ FD & AD.

Æqualia igitur sunt □FD & □AD.

□FB+2▭FBD+□BD, vel □FD [b]. □AB+□BD, vel □AD [c].

Et fit $bb + 2bx + xx \infty aa + xx$.

□BD

Rursus addatur utrinque xx,

□FB+2▭FBD □AB [d].

eritque $bb + 2bx \infty aa$.

□FB vel BC

Addatur utrinque bb,

▭CE, BD seu 2▭FBD ▭EAC.

erit [e] $2bx \infty aa - bb$.

id est,

b *per* 47 *primi.*

c *per* 4 *secundi.*

d *per* 6 *secundi.*

e *per* 16 *sexti.*

id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem, ſumptâque F B æquali B C,

CE AE AC BD
Ex conſtructione eſt ut $2b$ ad $a+b$, ita $a-b$ ad x.

Principium *Compoſitionis.*

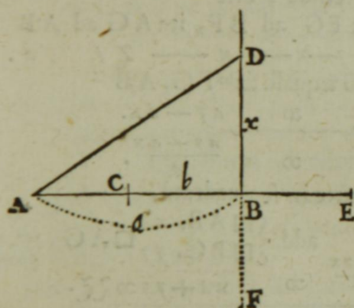
Inventâ igitur tum Conſtructione tum Compoſitione ſive Demonſtratione, poterit Problema, neglecto jam artificio, quo utraque fuit inveſtigata, in hunc modum conſtrui atque componi.

Conſtructio.

Productâ A B ad E, ut B E ſit æqualis B C: fiat ut C E ad A E, ita A C ad B D, jungaturque A D. Dico hanc ipſis D B, B C ſimul ſumptis æqualem eſſe.

Demonſtratio.

Etenim productâ D B ad F, ita ut B F ſit æqualis B C, quoniam per conſtructionem C E eſt ad A E, ſicut A C ad B D: erit [f] rectangulum ſub extremis C E, B D, id eſt, duplum rectangulum F B D, æquale rectangulo ſub mediis E A, A C. Quibus ſi addatur commune quadratum ex F B vel B C, erit etiam quadratum F B unà cum duplo rectangulo F B D æquale quadrato ex A B [g]. Quibus ſi rurſus addatur commune quadratum ex B D: erunt quoque bina quadrata ex F B, B D ſimul cum duplo rectangulo F B D, id eſt [h], quadratum totius F D, æqualia binis quadratis ex A B, B D, id eſt [i], æquale quadrato ex A D. Unde & ipſæ rectæ F D & A D æquales erunt. Hinc cum F D æqualis ſit ipſis D B, B C ſimul ſumptis, erit etiam A D ipſis D B, B C ſimul ſumptis æqualis. Quod erat faciendum.



f per 16 ſexti.

g per 6 ſecundi.

h per 4 ſecundi.

i per 47 primi.

THEOREMA.

Si in quadrante circuli A B C ſumatur arcus quilibet B D minor quàm 45 gr. cujus duplus ſit B E, eorumque tangentes B F, B G: erit ut quadratum radii A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B F ad B G.

Series *Analyſeos.*

Eſto A B $\infty\ a$

B F $\infty\ x$

B G $\infty\ y$, eritque F G $\infty\ y - x$

& A G $\infty\ z$.

Quoniam itaque arcus B E ipſius B D duplus ponitur, ac proinde angulus B A G duplus anguli B A F: erit angulus ad A in triangulo A B G rectâ A F bifariam ſectus.

a per 3 ſexti.

Unde [a] erit

ut F G ad B F, ita A G ad A B

$y - x \quad x \quad z \quad a.$

b per 16 ſexti.

Ideoque [b] ▭ B F, A G æquale ▭^lo F G, A B

div. utrinque per x: $xz \ \infty\ ay - ax.$

fit $z \ \infty\ \frac{ay - ax}{x}$.

Hinc ductâ utrâque parte in ſe quadratè,

add. $\left\{ \begin{array}{l} \square AB.\ aa \\ \square BG.\ yy \end{array} \right.$ $\square$ A G, per 47 primi.

erit $zz \ \infty\ \frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{xx} \ \infty\ aa + yy \ \infty\ zz.$

mult. utrinq; per xx: $aayy - 2aaxy + aaxx \ \infty\ aaxx + xxyy$

toll. utrinq; $aaxx$: $aayy - 2aaxy \ \infty\ xxyy$

div. utrinque per y: $aay - 2aax \ \infty\ xxy$

add. utrinque $2aax$: $aay \ \infty\ 2aax + xxy$

toll. utrinque xxy: $aay - xxy \ \infty\ 2aax$

div. utrinque per $aa - xx$: fit $y \ \infty\ \frac{2aax}{aa - xx}$.

$\square AB - \square BF \quad 2\square AB \quad BF \quad BG$

Hoc eſt, erit ut $aa - xx$ ad $2aa$, ita x ad y. Ut proponebatur.

De-

Demonſtrationis ſeries eodem modo ſe habet quo Analyſeos, cum utriuſque veſtigia conſentiant, quibus ab hypotheſi ad quæſiti concluſionem perducimur. Uti hic videre eſt.

Etenim cum [c] ſit — *c per 3 ſexti.*
ut F G ad B F, ita A G ad A B:
$y - x$ —— x —— z / a
erit quoque [d] — *d per 16 ſexti.*
ut □ F G ad □ B F, ita □ A G ſeu □ A B + □ B G ad □ A B
$yy - 2xy + xx$ —— xx —— zz, id eſt, $aa + yy$ / aa.
& dividendo [e] — *e per 17 quinti.*
ut □ F G — □ B F vel F H,
id eſt, ▭ B G H [f] ad □ B F, ita □ B G ad □ A B — *f per 6 ſecundi.*
$yy - 2xy$ —— xx —— yy / aa.
permutandoque [g] — *g per 16 quinti.*
ut ▭ B G H ad □ B G, vel [h] ut H G ad G B, ita □ B F ad □ A B — *h per 1 ſexti.*
$y - 2x$ —— y —— xx / aa.

Id eſt, invertendo & per converſionem rationis [i], — *i per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti.*
ut □ A B ad □ A B — □ B F, ita G B ad B H
aa —— $aa - xx$ —— y / $2x$.
& duplatis antecedentibus [k] convertendoque — *k vide Clavium ad 22 quinti.*
ut □ A B — □ B F ad 2 □ A B, ita B H ad 2 G B ſeu B F ad B G [l] — *l per 15 quinti.*
$aa - xx$ —— $2aa$ —————— x / y.
Quod erat oſtendendum.

Quòd ſi autem Algebræ ignaris ſive in inveniendi arte imperitis ipſa demonſtratio ſit exhibenda, poterit ea prætermiſſis jam hiſce veſtigiis ſic adhiberi.

Sumatur F H æqualis F B. Cum igitur in triangulo A B G angulus ad A rectâ A F bifariam ſectus ſit, erit [m] ut F G ad B F, ita A G ad A B. Sed cum linearum proportionalium etiam proportionalia ſint quadrata, erit & [n] ut quadratum F G ad quadratum B F, ita quadratum A G, id eſt, *per 47 primi*, ſumma quadratorum A B, B G, ad quadratum A B. Et dividendo [o] ut quadratum F G minus quadrato B F vel F H, id eſt [p] rectangulum B G H, ad quadratum B F, ita quadratum B G ad quadratum A B; permutandoque [q] ut rectangulum B G H ad quadratum B G ſeu [r] ut H G ad G B, ita quadratum B F ad quadratum A B. Hoc eſt, in-

m per 3 ſexti. *n per 22 ſexti.* *o per 17 quinti.* *p per 6 ſecundi.* *q per 16 quinti.* *r per 1 ſexti.*

s per Coroll. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti.
t vide Clavium ad 22 quinti.
u per 15 quinti.

invertendo & per conversionem rationis [s], ut quadratum A B ad quadratum A B minus quadrato B F, ita G B ad B H; & duplatis antecedentibus [t] convertendoque, ut quadratum A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B H ad duplum ipsius G B seu [u] B F ad B G. Quod erat demonstrandum.

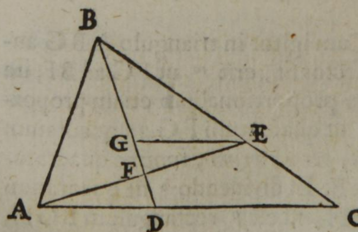
Hinc

„ Si, *Tangens cujuslibet arcûs minoris quàm 45 gr. ducatur* „ *in duplum Quadratum Radii; à Quadrato Radii auferatur* „ *Tangentis quadratum; Illud productum dividatur per hoc re-* „ *siduum: Quotus erit Tangens arcûs dupli.*

Theorema hoc à Clarissimo viro D. Joanne Pellio excogitatum atque ingeniosè adhibitum pluribus modis demonstratum reperitur in tractatu ejus de controversiis, circa veram circuli mensuram, inter ipsum & Clar. virum D. Christianum Severini Longomontanum ortis, ac anno 1647 in lucem editis.

THEOREMA.

Si fuerit triangulum A B C, cujus angulus ad B rectâ B D bifariam sit divisus, & ex B C abscindatur B E æqualis A B, jungaturque A E, secans B D in F: dico, si agatur E G parallela A C, occurrens ipsi B D in G, esse ut B G ad B D, ita A D ad D C, & A B ad B C; nec non D C bis esse ad excessum, quo D C superat A D, sicut B D ad D F.



Series *Analyseos.*

Esto B D ∞ *b*
A D ∞ *c*
D C ∞ *y*
& D F ∞ *z*.

Quoniam itaque triangulorum A B F, E B F anguli ad B ex hypothesi sunt æquales, nec non latera A B, B F & E B, B F, quæ ipsos comprehendunt, æqualia: erunt & [a] anguli ad F æquales, id est recti,

a per 4 primi.

basis-

basisque A F basi F E æqualis. Porrò cum [b] propter parallelas A C, G E anguli D A F, F E G in triangulis A F D, F G E æquales sint, ut & [c] anguli ad verticem A F D & G F E, latusque A F lateri F E, ut ostensum est: erunt quoque [d] reliqua latera A D, D F reliquis lateribus E G, G F æqualia. Hinc cum [e] propter similitudinem triangulorum B G E, B D C, B G sit ad G E, id est, A D, sicut B D ad D C; nec non B G ad B E, id est A B sicut B D ad B C: erit quoque [f] permutando B G ad B D, sicut A D ad D C, & A B ad B C. Quod est primum.

b per 29 primi.
c per 15 primi.
d per 26 primi.
e per Cor. 4. quinti.
f per 16 quinti.

Cæterùm D C bis esse ad excessum, quo D C superat A D, sicut B D ad D F: ita patet.

Est enim, ut B G ad B D, ita A D ad D C
$b - 2z$ —— b —— c / y.

Ideoque [g] $\square$ B G, D C ∞ $\square^{lo}$ B D, A D. (g per 16 sexti.)

$by - 2yz \infty bc.$

add. utrinque $2yz$
$by \infty 2yz + bc$

toll. utrinque bc
$by - bc \infty 2yz$

div. utrinque per $2y$
fit $\frac{by - bc}{2y} \infty z$. Hoc est, erit ut
2 D C   D C — A D   B D   D F
$2y$ ad $y - c$, ita b ad z. Quod est secundum.

Vel etiam, hoc modo:

Etenim cum sit
ut B G ad B D, ita A D ad D C
$b - 2z$ —— b —— c / y.

erit invertendo [h]
ut D C ad A D, ita B D ad B G
y —— c —— b / $b - 2z$.

h per Cor. 4. quinti.

& per conversionem rationis [i]
ut D C ad D C — A D, ita B D ad D G
y —— $y - c$ —— b / $2z$.

i per Cor. 19. quinti.

id est, duplatis antecedentibus, [k]
ut 2 D C ad D C — A D, ita 2 B D ad D G seu B D ad D F
$2y$ —— $y - c$ —— b / z.

k vide Clavium ad 22 quinti.

Ex his facile eſt, cognitis A D, D B, & D C, invenire D F. Si enim, exempli gratiâ, A D ſit 39, D B 45, & D C 325: fiat ut 2 D C 650 ad D C—A D 286, ita D B 45, ad D F $19\frac{4}{5}$.

THEOREMA.

Iiſdem poſitis, dico rectangulum A D C unà cum quadrato D B æquale eſſe rectangulo A B C.

Series *Analyſeos.*

Eſto A B ∞ a
B D ∞ b
A D ∞ c
B C ∞ x
D C ∞ y
& D F ∞ z.

a per 13 ſecundi.

Etenim cum [a] 2 ▭ B D F ſit ∞ □ A D + □ D B — □ A B,
id eſt, $2bz \infty cc + bb - aa$:
erit, dividendo utrinque per $2b$, $z \infty \frac{cc+bb-aa}{2b}$.

Unde cum per antec. Theorema inventum quoq; ſit $\frac{by-bc}{2y} \infty z$:
erit $\frac{cc+bb-aa}{b} \infty \frac{by-bc}{y}$.

diviſo utroque denominatore per 2, inſtituatur multiplicatio per crucem
$ccy + bby - aay \infty bby - bbc$
add. utrinque aay
$ccy + bby \infty aay + bby - bbc$
toll. utrinque bby
$ccy \infty aay - bbc$
add. utrinque bbc
$ccy + bbc \infty aay$
loco ay ſubſtit. cx
$ccy + bbc \infty acx$
div. utrinque per c
▭ADC + □DB ▭ABC
Et fit $cy + bb \infty ax$. Quod erat propoſitum.

Ex demonſtratis in antec. Theoremate vel 3[tia] *Sexti* eſt ut A D ad D C, ita A B ad B C
c —— y —— a / x.
ac proinde *per 16 ſexti* ▭ A D, B C ∞ ▭ A B, D C
$cx \infty ay$.

Quo autem pacto in adæquatione hac reſolvenda argumentandum ſit, ut ſequendo veſtigia allatæ reductionis, quæ ob ſuperiorem multiplicationem per crucem propriè Algebraïca eſt,

quæ-

quæsitum Theorematis Geometricè concludatur, sequens terminorum dispositio docebit.

Ex præcedenti Theoremate est
ut 2 DC ad DC — AD, ita BD ad DF
$2y$ —— $y - c$ —— b / z.

ac proinde [b] 2 ▭ CDF æqual. ▭ BDC — ▭ ADB
$\propto$ $2yz$ ∞ $by - bc$.

b per 16 sexti.

Deinde [c] est, ut BD ad DC, ita 2 ▭ BDF ad 2 ▭ CDF. assumptâ sc. com. alt. 2 DF, id est, 2 z.
b —— y —— $2bz$ / $2yz$.

c per 1 sexti.

Hinc cum [d]
2▭BDF æqu. □AD+□DB—□AB, & $\propto$ 2▭CDF æqu. ▭BDC—▭ADB:
$2bz$ ∞ $cc + bb - aa$, & $2yz$ ∞ $by - bc$:

d per 13 secundi.

erit ut BD ad DC, seu [e] □BD ad ▭BDC,
bb —— by

e assumptâ com. altit. BD, id est, b.

ita □AD+□DB—□AB ad ▭BDC—▭ADB.
$cc + bb - aa$ —— $by - bc$

ideoque [f]
& reliq. □AB—□AD ad rel. ▭ADB, ut totum ad totum seu BD ad DC.
$aa - cc$ —— bc —— b / y.

f per 19 quinti.

Facile hic esset quæsitum Propositionis concludere, revocando hanc proportionem ad æqualitatem, & deinde in locum a y substituendo c x. Sed quoniam sic ad solida ascenditur, de quibus in posterioribus Elementorum libris agitur, qui ob difficultatem suam magis præteriri quàm pro Elementis Geometriæ addisci solent, poterimus iisdem sepositis in quæsiti conclusionem sic ulteriùs argumentari.

Sed ut BD est ad DC, ita quoque est [g] ▭ ADB ad ▭ ADC;
b —— y —— bc / cy;

g assumptâ comm. altit. AD seu c.

& ut BD ad AD, ita quoque est [h] ▭ ADB ad □AD; & [i],
b —— c —— bc / cc
□BD ad ▭ ADB seu bb ad bc.

h assumptâ comm. altit. AD seu c.
i assumptâ comm. altit BD seu b.

Erunt itaque □AB--□AD, ▭ADB, & □AD tres magnitudines
aa—cc —— bc ....cc ab una parte;
& □BD, ▭ADB, & ▭ADC tres aliæ ab altera
bb .... bc —— cy parte, quæ binæ sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata:

k per 23 quinti.

quare etiam *k* ex æqualitate proportionales erunt,
id eſt, □AB—□AD ad □AD, ſicut □BD ad ▭ADC.
aa—cc —— cc —— bb / cy.

l per 18 quinti.

Et componendo *l*.
□AB ad □AD, ſicut □BD+▭ADC ad ▭ADC
aa —— cc —— bb+cy / cy.

m per 16 quinti.

Permutandoque *m*
□AB ad □BD+▭ADC, ſicut □AD ad ▭ADC ſeu
aa —— bb+cy —— cc / cy.
AD ad DC, id eſt, *c* ad *y*. *n*

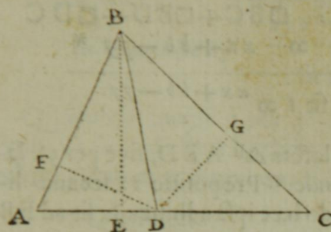
n per 1 ſexti, relictâ ſc. com. altit. AD ſeu *c*.
o per antec. Theorema vel 3 ſexti.
p aſſumptâ com. altit. AB ſeu *a*.
q per 9 quinti.

Sed ut AD ad DC, ita *o* eſt quoque AB ad BC, ſeu *p*, □AB
c —— y —— a / x.
ad ▭ABC, id eſt, *aa* ad *ax*.
Unde erit ut □AB ad □BD+▭ADC, ita □AB ad ▭ABC.
aa —— bb+cy —— aa / ax.
Æqualia igitur ſunt *q* □BD+▭ADC & ▭ABC.
bb+cy ∞ ax. Quod erat oſtendendum.

Idem quoque aliter à nobis demonſtratum reperitur Prop^ne^ 20^mâ^ ſecundæ partis prioris tractatus Exercitationum noſtrarum Mathematicarum; ac præterea etiam adhuc aliter ab aliis.

Alia

Alia præcedentis Theorematis Analysis, supponendo tantùm 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis.



Demissis ex D super A B, B C, perpendicularibus D F, D G, patet, ob angulum A B C rectâ B D bifariam divisum; ipsas D F & D G, ut & F B & B G *per 16 primi* esse æquales. Deinde esto etiam B E perpendicularis ad A C, sitque

A B ∞ a
B D ∞ b
A D ∞ c
B C ∞ x
D C ∞ y
F B vel B G ∞ t, eritque A F ∞ $a - t$,
& G C ∞ $x - t$.
& E D ∞ v, eritque A E ∞ $c - v$,
& E C ∞ $y + v$.

per 47 primi.

Subtr. { □ A D. cc / □ A F. $aa - 2at + tt$ } Subtr. { bb. □ B D / tt. □ F B }

□ F D. $cc - aa + 2at - tt$ ∞ $bb - tt$. □ F D

dele utrinque tt, & transfer cc & aa

2 ▭ A B F □ A B + □ B D − □ A D
$2at$ ∞ $aa + bb - cc$ *

div. utrinque per $2a$

fit t ∞ $\frac{aa + bb - cc}{2a}$.

Sed t in aliis quoque terminis inveniri potest, quærendo eam per 3 latera trianguli D B C, hoc pacto:

per 47 primi.

$$\text{Subtr.}\begin{cases}\square DC.\ yy\\ \square GC.\ xx - 2xt + tt\end{cases}\qquad \text{Subtr.}\begin{cases}bb.\ \square BD\\ tt.\ \square BG\end{cases}$$

$$\square DG.\ yy - xx + 2xt - tt \infty bb - tt.\ \square DG$$

del. utrinque tt, & transf. yy & xx

$$2\,\square\, CBG \quad \square BC + \square BD - \square DC$$

$$2xt \infty xx + bb - yy \; *$$

div. utrinque per $2x$

$$\text{fit } t \infty \frac{xx + bb - yy}{2x}.$$

Sive igitur quæratur t per 3^a latera $\triangle^{li}$ A B D, ſive per 3^a latera $\triangle^{li}$ D B C, elucet utique inde * Propoſitio 13 ſecundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipſa adhibenda ſit ad F B vel B G inveniendam.

Erit itaque

$$\frac{aa + bb - cc}{a} \infty \frac{xx + bb - yy}{x}$$

diviſo utroque denominatore per 2, inſtituatur multiplicatio per crucem

$$aax + bbx - ccx \infty axx + abb - ayy$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ ſunt ab una parte habeantur

$$bbx - abb \infty axx - ayy + ccx - aax$$

div. utrinque per $x - a$

$$\text{eritque } bb \infty \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}.$$

Quæratur jam v per 3^a latera trianguli A B D

per 47 primi

$$\text{Subtr.}\begin{cases}\square AB.\ aa\\ \square AE.\ cc - 2cv + vv\end{cases}\qquad \text{Subtr.}\begin{cases}bb.\ \square BD\\ vv.\ \square ED\end{cases}$$

$$\square EB.\ aa - cc + 2cv - vv \infty bb - vv.\ \square EB$$

del. utrinque vv, & transf. aa & cc

$$2cv \infty bb + cc - aa$$

div. utrinque per $2c$

$$\text{fit } v \infty \frac{bb + cc - aa}{2c}.$$

Sed v quoque in aliis terminis inveniri poteſt, quærendo eam per 3^a latera trianguli D B C, hoc pacto:

per 47 primi

Subtr. $\left\{\begin{array}{l}\square BD.\ bb\\ \square ED.\ vv\end{array}\right.$ Subtr. $\left\{\begin{array}{r} xx.\ \square BC\\ yy+2yv+vv.\ \square EC\end{array}\right.$

$$\square EB.\ bb-vv \ \infty\ xx-yy-2yv-vv.\ \square EB$$

del. utrinque vv, & transf. bb & $2yv$

$$2\square CDE \qquad \square BC-\square DC-\square BD$$

$$2yv \ \infty\ xx-yy-bb \quad \dagger$$

div. utrinque per $2y$

$$\text{fit } v \ \infty\ \frac{xx-yy-bb}{2y}.$$

Quærendo itaque v per 3^a latera $\triangle^{li}$ DBC, emanat hinc Prop. 12 ſecundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipſa debeat adhiberi ut inveniatur ED.

Quare erit

$$\frac{bb+cc-aa}{c} \ \infty\ \frac{xx-yy-bb}{y}$$

diviſo utroque denominatore per 2, inſtituatur multiplicatio per crucem

$$bby+ccy-aay \ \infty\ cxx-cyy-cbb$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ ſunt, ab una parte habeantur

$$bby+cbb \ \infty\ cxx+aay-cyy-ccy$$

div. utrinque per $y+c$

$$\text{\& fit } bb \ \infty\ \frac{cxx+aay-cyy-ccy}{y+c}.$$

Dupliciter igitur invento bb, habebitur æquatio

$$\text{inter } \frac{axx-ayy+ccx-aax}{x-a} \text{ \& } \frac{cxx+aay-cyy-ccy}{y+c}.$$

mult. per crucem

$$axxy-ay^3+ccxy-aaxy+acxx-acyy+c^3x-aacx$$
$$\infty$$
$$cx^3+aaxy-cxyy-ccxy-acxx-a^3y+acyy+accy$$

tranſpoſitis tranſponendis, fit

$$2acxx+cxyy+c^3x-cx^3-aacx+2ccxy$$
$$\infty$$
$$2aaxy+ay^3+accy-axxy-a^3y+2acyy$$

div. utrinque per $2ax+yy+cc-xx-aa+2cy$.

AD DC AB BC

eritque $cx \ \infty\ ay$. Hoc eſt, erit ut c ad y, ita a ad x.

ac proinde $x \ \infty\ \frac{ay}{c}$, & $\frac{cx}{a} \ \infty\ y$. Quæ tertia eſt Propoſitio libri ſexti Euclidis.

Hinc

Hinc existente $bb \infty \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$, si in locum ay substituatur cx & vice versâ: habebitur $bb \infty \frac{axx - cxy + cay - aax}{x - a}$,

▭ADC+□DB ▭ABC

id est, $bb \infty ax - cy$; seu, quod eodem recidit, $cy + bb \infty ax$. Omnino ut in antecedenti Theoremate. Unde facile est, cognitis A B, B C, A D, & D C, invenire B D.

Quòd si autem, existente $bb \infty ax - cy$, pro x scribatur $\frac{ay}{c}$, fiet $bb \infty \frac{aay}{c} - cy$ vel $bbc \infty aay - ccy$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bbc}{aa - cc} \infty y$. Vel, resolvendo æqua-

□AB—□AD □BD AD DC

litatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad bb, ita c ad y. Similiter, si pro y scribatur $\frac{cx}{a}$, erit $bb \infty ax - \frac{ccx}{a}$ vel $bba \infty aax - ccx$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bba}{aa - cc} \infty x$. Vel,

□AB—□AD

resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad

□BD AB BC

bb, ita a ad x. Quæ quidem insuper ostendunt, quo pacto ex tribus lateribus △li A B D inveniri possint B C & D C.

Atque ita constat, si ad præcedentis Theorematis investigationem duntaxat adhibeantur 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis, quâ ratione ex calculo non modò idem Theorema emanet, verùm etiam Propositio 12 & 13 secundi libri, 3tia sexti, aliæq; propositiones, in Euclide non extantes, quæ triangulum concernunt, cujus angulus bifariam est divisus.

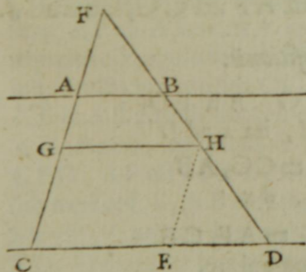
Cæterum calculum hunc multò prolixiorem esse calculo antecedentis Theorematis nemini (ut opinor) mirum videri debet, cum ad illud indagandum supposuerimus Theorema, quod ei immediatè præcedit, tum etiam Prop. 12 aut 13 secundi: siquidem rationes, quæ in iis comprobandis cunctæ ac singulæ sunt perpendendæ, illis sic jam præsuppositis omnino prætermittuntur; quæ alioquin, si rem ipsam penitiùs inspicere atque à

primis

primis velut principiis, (quemadmodum in Algebra præsertim fieri solet,) deducere velimus, longâ serie forent spectandæ. Quæ quidem hic refero, ut quilibet intelligat, nonnullos reperiri, etiam in Mathematicis haud leviter versatos, qui videntes hujusmodi calculum sæpenumero valde prolixum evadere, plurimisve terminis constantem, demonstrationes Geometricas ei longè præferunt, non animadvertentes ejusdem beneficio elici Theoremata, quibus ad id concatenatim utuntur. Existimantes præterea Algebram vel hoc nomine non magni faciendam esse, quòd solummodo circa æquationes versetur ac easdem continuè respiciat, quod sanè ego maximi momenti judicaverim; quippe harum ope infinita genera Problematum pro uno genere Problematum haberi queunt, ac demum quicquid in universa Mathesi arduum seu difficile occurrit, id omne per æquationem absque ulla ambage & verborum involucris quàm simplicissime potest explicari.

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis A B, C D, & in iis duobus punctis A & E: è puncto F extra ipsas dato rectam lineam ducere F B D, quæ à positione datis abscindat rectas A B, E D, datam inter se rationem habentes A F ad C G, seu *a* ad *d*.



Series *Resolutionis.*

Ponatur factum, quod quæritur, hoc est, sit A B ad E D, ut *a* ad *d*, sitque A F ∞ *a*
C F ∞ *b*
C E ∞ *c*
& A B ∞ *x*.

Hinc ut A F ad C G, ita A B ad 4.tam seu E D

a —— d —— x / $\frac{dx}{a}$

Sed ex similitudine △lorum A F B & C F D est quoque

ut A F ad A B, ita C F $\frac{\text{add. CE. } c}{}$

a —— x —— b / ad C D. $c + \frac{dx}{a}$

Quare erit *per 16 sexti* ▭ A F, C D ▭ A B, C F

$ac + dx \infty bx$.

Transferatur dx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur

eritque $ac \infty bx - dx$.

Dividatur jam utraque pars per $b - d$

& fit $x \infty \frac{ac}{b-d}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $b - d$ ad c, ita a ad x.

Id quod arguit, ad Problema hoc solvendum, statuendum esse ut G F ad C E, ita A F ad A B. Ut autem ipsum componatur, repetantur Resolutionis vestigia & ab ejus fine per eadem redeatur ad id unde initium cepit. Quemadmodum superiùs jam sæpiùs monstratum fuit, atque etiam hìc videre est, præmittendo priùs Constructionem, quæ sic se habet.

Constructio.

Ductâ G H parallelâ A B vel C D ac æquali C E, agatur ex F per H recta F H D, secans A B, C D in B & D: dico A B ad E D esse, sicut A F ad C G, seu a ad d.

Finis *Compositionis.*

A F C G A B E D.

Unde *per 16 sexti* erit, ut a ad d, ita x ad f.

▭ A F, E D ▭ C G, A B

erit similiter $af \infty dx$.

▭ A F, C E

Hinc dempto utrinque communi ac,

Quare

▭AF,CE+▭AF,ED ▭AF,CE+▭CG,AB.
Quare erit etiam *a c* + *a f* ∞ *a c* + *d x*.

▭CF, AB ▭AF,CE+▭CG,AB.
Erat autem & *b x* ∞ *a c* + *d x*.

▭CF,AB ▭AF,CD,seu,▭AF,CE+▭AF,ED.
Quare *per 16 sexti* erit *b x* ∞ *a c* + *a f*.

AF AB CF CD
eritque ex similitudine △lorum AFB,& CFD,ut *a* ad *x*,ita *b* ad *c*+*f*.

Esto jam ED ∞ *f*,

▭CF,AB ▭AF,CE+▭CG,AB.
eritque *b x* ∞ *a c* + *d x*.

▭CG, AB
Addatur utrinque *d x*,

▭GF,AB seu ▭CF,AB—▭CG,AB ▭AF,CE.
erit *per 16 sexti* *b x* — *d x* ∞ *a c*.

id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

GF GH vel CE AF AB
Ex constructione est, ut *b* — *d* ad *c*, ita *a* ad *x*:

Principium *Compositionis*.

Relictis igitur hisce vestigiis demonstratio eisdem superstructa erit talis.

Demonstratio.

Quoniam itaque ex constructione GF est ad GH vel CE, sicut AF ad AB: erit [a] rectangulum sub extremis GF, AB æquale rectangulo sub mediis AF, CE. Quibus si addatur commune rectangulum sub CG, AB, erit [b] rectangulum sub tota CF & AB æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub CG, AB. Porrò, quoniam ex similitudine triangulorum AFB & CFD, AF est ad AB, sicut CF ad CD: erit [c] rectangulum sub mediis CF, AB æquale rectangulo sub extremis, AF, CD, hoc est, [d] æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub AF, ED. Erat autem quoque rectangulum sub CF, AB æquale duobus

a *per 16 sexti.*
b *per 1 secundi.*
c *per 16 sexti.*
d *per 1 secundi.*

bus rectangulis sub A F, C E & sub C G, A B. Æqualia igitur erunt bina rectangula sub A F, C E & sub A F, E D binis rectangulis sub A F, C E & sub C G, A B. A quibus si commune auferatur rectangulum sub A F, C E, erit etiam reliquum rectangulum sub A F, E D æquale reliquo rectangulo sub C G, A B. Unde [e] ut A F ad C G, ita A B ad E D. Quod erat faciendum.

e per 16 sexti.

Hactenus quæ præcesserunt Problemata & Theoremata istius naturæ censeri possunt, quorum difficultas in demonstrationibus ex calculi vestigiis eliciendis potius quàm in iisdem per Algebram solvendis & ostendendis consistere judicari debet. Etenim cum in Algebra Problemate aut Theoremate ad Æquationem perducto hæc secundùm certas regulas reducatur resolvaturq́;, at verò demonstratio Geometrica, quæ ex eorum calculo depromenda est, non semper eisdem legibus sit obnoxia, sed diversimodè prout requiritur, immutanda veniat, ut ipsa commodè feliciterq́; per Geometriæ Elementa explicetur: visum nobis fuit hîc consequenter illius contrarium in adductis aliquot exemplis patefacere, utpote in quibus præcipua difficultas in ipsorum per Algebram enodatione sita esse appareat. In quem finem duas primùm Quæstiones Arithmeticas in medium afferam, ut, ipsis beneficio calculi hujus Geometriæ solutis, cuique fiat manifestum, quo pacto illius ignari deinde ad easdem solvendas ratiocinari possint, vulgaribus tantùm Arithmetices regulis instructi. Quibus aliquot Quæstiones Geometricas ejusdem generis subjuncturus sum, quò simul constet plurimas etiam tales reperiri, post quarum solutionem Algebraïcam ultrò velut sese offert solutio ipsarum Geometrica, ita ut quod illius demonstrationem insuper concernit Geometriæ Elementa jam edoctos non effugiat.

Quæstio 44 primæ partis libri primi Exercitationum nostrarum Mathematicarum.

QUÆSTIO.

OEnopola duplex habet vinum, unius 8 *stufris, alterius* 14 *stufris constat cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita ut dolium*

dolium vini vendere possit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat?

Ponatur eum debere sumere x cantharos primi 8 stufr. seu a, & y cantharos secundi 14 stufr. seu b.

Deinde supponendo dolium continere 80 cantharos seu c, & pretium 35 flor. vel 700 stufrorum, quo ipsum vendi debet, vocari d: erit $x + y \propto c$
& $x \propto c - y$.

Quæratur jam quanti constent canthari utriusque vini, quo dolium impleri debet: dicendo

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.
1 —— a —————— x / facit ax. constant canthari primi vini, in dolium infundendi

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.
1 —— b —————— y / facit by. constant canthari secundi vini, in dolium infundendi

—————— stufr.

eritque summa $ax + by \propto d$.

transf. by in alt. part. $ax \propto d - by$

divid. utrinque per a fit $x \propto \frac{d - by}{a}$.

Erat autem & $x \propto c - y$.

Quare erit $c - y \propto \frac{d - by}{a}$

mult. utrinque per a $ac - ay \propto d - by$

transf. quantitates, ut quæ in y ductæ sunt unam teneant æquationis partem $by - ay \propto d - ac$

div. utrinque per $b - a$ & fit $y \propto \frac{d - ac}{b - a}$ vel $\frac{1d - 1ac}{b - a}$. Id est, erit ut $b - a$ ad 1, ita $d - ac$ ad y.

Quæstione hâc ita resolutâ, ut constet, quo pacto in quæsiti inventionem circa hæc facienda ratiocinari liceat, inspiciatur sequens illorum interpretatio.

Mult. *c.* 80 Canth. seu, dolium
per *a.* 8 stufr.
fiunt *ac.* 640 stufr. . . . .
constat dolium plenum vino 8 stufrorum.

Subtr.
Ex *d.* 700 stufr. constat dolium plenum vino 8 & 14 stufrorum
ac. 640 stufr.
Relinq. $d - ac$. 60 stufri, quibus dolium plus constat impletum vino 8 stufr. & 14 stufrorum, quàm plenum solo vino 8 stufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 stufrorum in dolio contenti cariores sunt cantharis 8 stufrorum, illorum loco sumptis.

stufr.
Ex *b.* 14
subtr. *a.* 8
$b - a$. 6 stufr. differentia pretii unius canthari — 1 Canth. — $d - ac$. 60 stufr. differentia pretii cantharorum in dolio / facit $\frac{1d - 1ac}{b - a}$ seu 10 canth. 14 stufrorum ∞ *y*

subtr.
c. 80 Canth. dolii
rel. $c - y$. 70 canth. 8 stufrorum ∞ *x*.

Quæstio.

Quæstio 46 primæ partis libri primi Exercitationum nostrarum Mathematicarum.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stufr. & 25 pira 2 stufris. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

Ponatur ancillam debere accipere *x* poma, unde cum utriusque fructus 100 seu *a* simul pro $9\frac{1}{2}$ stufr. seu *b* habere velit, sequitur ipsam recipere debere $a - x$ pira.

Hinc cum 10 poma seu *c* offerantur 1 stufro seu *d*, & 25 pira seu *e* stufris 2 seu *f*, quæratur quanti jam constent assumpta *x* poma, & $a - x$ pira.

Di-

Dicendo;

Poma *conſtant* ſtufr., *quanti conſtabunt* Poma ſtufr.

c —— d —————— x / facit $\frac{dx}{c}$. conſtant poma ſumenda

Pira *conſtant* ſtufr., *quanti conſtabunt* Pira

e —— f —————— $a-x$ / facit $\frac{fa-fx}{e}$. conſtant pira ſumenda

eritque ſumma $\overline{\frac{dex+cfa-cfx}{ce}} \infty b.$ ſtufr.

mult. utrinque per ce $\quad dex+cfa-cfx \infty cbe$

transf. cfa ad alt. partem $\quad dex-cfx \infty cbe-cfa$

div. utrinque per $de-cf$ $\quad$ & fit $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$.

Ad fractionis hujus reſolutionem, fiat ut c ad d, ita e ad quartam, quæ vocetur g: eritque $cg \infty de$. Unde pro $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$ ſcribi poterit $x \infty \frac{cbe-cfa}{cg-cf}$ vel $\frac{be-fa}{g-f}$. Deinde fiat ut e ad f, ita a ad 4tam, quæ vocetur h: eritque $eh \infty fa$; ita ut pro $x \infty \frac{be-fa}{g-f}$ ſcribi poſſit $x \infty \frac{be-eh}{g-f}$. Hinc ſi demum fiat, ut $g-f$ ad e, ita $b-h$ ad 4tam, erit ea ∞x, quantitati quæſitæ ſumendorum pomorum.

Quæ itaque ad quæſtionis ſolutionem citra Algebram ſequenti modo argumentandum eſſe inferunt

Poma ſtufr. Poma

c d e g

10 —— 1 —— 25 / facit $2\frac{1}{2}$ ſtufr. conſtant 25 Poma.

ſubtr. f. 2 ſtufr. pretium 25 pirorum.

Relinq. $g-f$. $\frac{1}{2}$ ſtufr. quo 25 poma cariora ſunt 25 piris.

Pira ſtufr. Pira Subtr.

e f a b. $9\frac{1}{2}$ ſtufr. conſtant 100 poma & pira ſimul

25 —— 2 —— 100 / facit h. 8 ſtufr. conſtant 100 pira

relinq. $b-h$. $1\frac{1}{2}$ ſtufri, quibus 100 poma & pira ſimul cariora ſunt 100 piris, vel etiam,

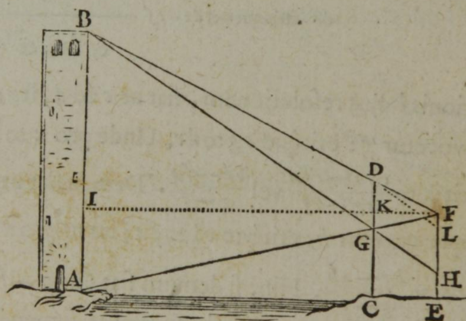
qui-

quibus poma in centenario contenta cariora sunt piris eorum loco sumptis.

ſtufr. differ.	Poma	ſtufr. differ.	Subtr.
$g - f$	e	$h - b$	a. 100
$\frac{1}{2}$ ———	25 ———	$1\frac{1}{2}$ /	facit x. 75 poma
			& $a - x$. 25 pira.

PROBLEMA.

Metiri altitudinem turris A B, ut & diſtantiam A C, beneficio duorum baculorum C D, E F, datis G D ∞ a, C E ∞ b, & H F ∞ c.



Eſto A C ∞ x,
& A B ∞ y.

Series *Analyſeos.*

Ductâ I F parallelâ A E, erit propter ſimilitudinem $\triangle$rum A B F & G D F

ut A B ad I F vel A E, ita G D ad K F vel C E.

y ——— $x + b$ ——— a / b.

Ac proinde per 16 ſexti

$by \infty ax + ab$.

Eodem modo, erit propter ſimilitudinem $\triangle$rum B D G & B F H

ut B D ad B F, ſive I K ad I F

hoc eſt, A C ad A E, ita G D ad H F.

x ——— $x + b$ ——— a / c.

Adeo-

Adeoque per 16 sexti

$cx \infty ax + ab$.

Auferatur utrinque ax,

& fit $cx - ax \infty ab$.

Dividatur jam utraque pars per $c - a$,

eritque $x \infty \frac{ab}{c-a}$. Hoc est, resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $c - a$ ad a, ita b ad x.

Jam cum eidem æqualia inter se quoque sint æqualia

erit $by \infty cx$. Hoc est, erit ut b ad c, ita x ad y.

Quod si autem invenire lubeat y, non inventâ priùs x, subrogetur in hujus locum in æquatione ultimò hîc inventâ valor ejus inventus $\frac{ab}{c-a}$,

fietque $by \infty \frac{abc}{c-a}$.

Ubi, si utrinque dividatur per b, invenietur $y \infty \frac{ac}{c-a}$. Quæ quidem æqualitas in proportionem sic resolvitur, dicendo: ut $c - a$ ad a, ita c ad y. E quibus itaque hujusmodi Constructio seu operandi modus elucescit.

Sumptâ H L æquali G D, junctaque D K, fiat ut $c - a$ ad a, hoc est, ut F L ad L H, sive F D ab D B, sive etiam F G ad G A, ita E C seu b ad C A seu x; & ita quoque F H seu c ad A B seu y.

Cujus demonstratio ex 2da & 4ta sexti libri Elementorum perspicua est, quippe considerando rectam D L ipsi B H parallelam secare proportionaliter rectas B F, F H, perinde ac D C, quæ ipsi A B est parallela, secat rectas A F, A E; ut & rectam F E eidem A B parallelam, facientem △la similia G F H & G A B.

Cæterùm ut praxis hujus Problematis cuivis obvia sit, visum fuit illud per numeros illustrare, ut sequitur.

digit.

Esto G D $\infty a \infty 24$

C E $\infty b \infty 30$

& H F $\infty c \infty 25$.

Ut F L ad L H,
seu F D ad D B,
sive etiam F G ad G A, ita $\left\{\begin{matrix}EC.\ 30\\ FH.\ 25\end{matrix}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix}CA.\ 720.\\ AB.\ 600.\end{matrix}\right\}$ digit.
1 —— 24,

PROBLEMA.

Metiri distantiam turrium A, B, cùm ad A pervenire licet, datis C A ∞ a, A D ∞ b, C D ∞ c, A E ∞ d, & C F ∞ e.

Esto A B ∞ x.

Series *Analyseos*.

Ductâ G E parallelâ C D, fiat propter similitudinem △rum ADC & AEG,

ut A D ad D C, ita A E ad E G

b —— c —— d / $\frac{cd}{b}$:

itemque

ut A D ad A C, ita A E ad A G.

b —— a —— d / $\frac{ad}{b}$.

Hinc propter similia △la C B F & G B E erit ut

C F ad C B, ita G E add. AB.x.

e — $a+x$ — $\frac{cd}{b}$ / ad GB. $\frac{ad+bx}{b}$

Ac proinde per 16 sexti erit ▭ C F, G B æquale ▭ C B, G E

$\frac{ade+bex}{b}$ ∞ $\frac{acd+cdx}{b}$.

Inventâ igitur æquatione, ut evanescant fractiones, multiplicetur utrinque per b, & fit $ade+bex$ ∞ $acd+cdx$.

Transferantur jam quantitates, ita

ita ut quæ in x ductæ ſunt unam partem æquationis obtineant, reliquæ autem alteram

fietque $bex - cdx \infty acd - ade$.

Denique dividatur utrinque per $be - cd$

eritque $x \infty \frac{acd - ade}{be - cd}$.

Jam ut æqualitas hæc omnium facillimè in proportionem reſolvatur, ſimulque inde eluceat, quo pacto quis ratiocinari teneatur, ut quæſitam lineam A B ſeu x ex datis quàm breviſſimè inveniat: animadvertere oportet, quænam litera plurimùm omnium in hiſce terminis reperiatur. Quæ igitur cum hic deprehendatur eſſe d, ipſaque ſe ter prodat, ubi reliquæ non niſi bis offenduntur, faciendum eſt, ad deprimendas dimenſiones, ut illa in omnibus terminis inveniatur. In quem ſinem ſi fiat ut d ad b, ita e ad 4^{tam}, quæ vocetur f: erit $df \infty be$, ac proinde $x \infty \frac{acd - ade}{df - cd}$ ſeu $\frac{ac - ae}{f - c}$. nimirum, abbreviando terminos omnes per d. Ubi ſi demum fiat ut $f - c$ ad $c - e$, ita a ad 4^{tam}: erit ipſa ∞x, hoc eſt, ∞ quæſitæ lineæ A B. Atque ita apparet longitudinem ejus duabus regulis trium ſeu proportionum inveniri poſſe, quæ aliàs 3^{bus} aut pluribus inveſtiganda foret, ſi nullum in reſolvenda hac fractione fieret diſcrimen.

Ubi notandum, eandem fractionem $\frac{acd - ade}{be - cd}$ etiam alio modo in duas proportionum regulas eſſe reſolubilem, quæ ſingulæ ſicut præcedentes non præter unam dimenſionem agnoſcunt ſive omnino ſimplices exiſtunt. Nimirum conſiderando in duobus terminis reperiri cd, & in ſingulis reliquorum duorum reperiri e; adeò ut, ſi planum cd in aliud tranſmutetur, cujus unum latus ſit e, litera e ſic in omnibus terminis haberi valeat, quæ deinde omitti poſſit. Ac proinde ſi ſtatuatur, ut e ad c, ita d ad 4^{tam}, quæ vocetur g: erit $eg \infty cd$, ita ut pro $\frac{acd - ade}{be - cd}$ ſcribi poſſit $\frac{aeg - ade}{be - eg}$ vel $\frac{ag - ad}{b - g}$. Unde ſi rurſus fiat ut $b - g$ ad $g - d$, ita a ad 4^{tam}: erit ea ∞x, lineæ quæſitæ A B. Quæ quidem animadverſio, cum in abſtracto fiat nullâ factâ calculi relatione ſive reſtrictione ad figuræ lineas, luculenter oſtendit, quàm perperam judicent illi, qui non ritè perſpicientes hujus Geometriæ Methodum

dum constructiones concinnas aliunde potiùs quàm ex ejus calculo derivari autumant. Quod utique plurimis exemplis demonstrare possem, iisque non inelegantibus, sed cum id prolixiùs explicare non sit hujus loci, hæc in medium attulisse suffecerit.

Denique ut pateat, quo pacto præcedentis fractionis resolutio ad figuræ lineas pertineat eaque simul nobis manifestet, quales lineæ ducendæ sint, quæ nos ad quæsiti finem perducant: consequens fuerit ut ea quæ ad facilitatem reductionis circa calculum seorsim sumus meditati ad figuræ lineas referamus. Constructio igitur sive operandi modus talis est.

Fiat ut d ad b, hoc est, ut AE ad AD sive CH ad CI, ita CF seu e ad CK seu f. Deinde fiat ut $f-c$ ad $c-e$, hoc est, ut KD ad DF sive ID ad DB, ita CA seu a ad AB seu x.

Cujus demonstratio ex ipsa proportionalium applicatione manifesta est.

Eâdem manente fractionis resolutione possunt dictæ proportionales diversis aliis modis figuræ accommodari, indeque velut aliæ constructiones concinnari, quibus licèt figuræ valde dissimiles appareant, operatio tamen una eademque existit. Quas quidem omnes hìc exponere propter earum multitudinem supervacuum duximus. Idem intellige cùm præcedens fractio secundo modo resolvitur.

Unde colligere licet, cum ex sola applicatione harum proportionalium, manente resolutione fractionis aut eâdem aliquantulum immutatâ, complures viæ ultro quasi sese prodant, quibus à datis ad quæsitum perducamur, quanto ideo cum emolumento hujus Geometriæ calculus ad omnifarias quæstiones adhibeatur; utpote cujus beneficio non modò difficultas omnis breviter ob oculos ponitur, sed etiam quid circa illas sit factu opùs plenè edocetur.

Cæterùm ut iis, quibus hujus generis Problemata arrident, quæ absque ullo instrumento Mathematico in campo perfici queunt, etiam praxis allati Problematis constet, visum fuit illud servando priorem fractionis resolutionem secundùm superiorem ejus applicationem per numeros illustrare, ut sequitur.

Esto

pedum

Esto CA ∞ a ∞ 450
AD ∞ b ∞ 390
CD ∞ c ∞ 420
AE ∞ d ∞ 225
& CF ∞ e ∞ 252.

Tum fiat
Ut AE ad AD,
sive CH ad CI, ita CF ad CK
225 — 390 — 252 / $436\frac{4}{5}$
CD. 420
subtr. CD. 420 subtr. CF. 252 ped.
Deinde, ut DK. $16\frac{4}{5}$ ad FD. 168, ita CA. 450 / ad AB. 4500.
Sive ut ID ad DB

PROBLEMA.

Trianguli ABC producto latere AC ad D, ductâque rectâ DEF, secante CB, AB in E & F, dantur AB ∞ a, BC ∞ b, AC ∞ c, CD ∞ d, & CE ∞ e: oporteatque invenire AF ∞ x.



Series *Analyseos.*

Ductâ FG parallelâ BC, fiat propter similitudinem triangulorum ABC & AFG

ut AB ad BC, ita AF ad FG
a —— b —— x / $\frac{bx}{a}$.

Itemque
ut A B ad AC, ita AF ad AG   AC   GC

a —— c —— x / $\frac{cx}{a}$. quæ ſubducta ex c, relinquit $\frac{ca - cx}{a}$.

Hinc propter ſimilia △la CED & GFD
erit   add. CD. d
ut EC ad CD, ita FG

e —— d —— $\frac{bx}{a}$ / ad GD. $\frac{da + ca - cx}{a}$.

Ac proinde per 16 ſexti

▭ EC, GD   ▭ CD, FG

$$\frac{dae + cae - cex}{a} \infty \frac{dbx}{a}.$$

mult. utrinque per a

$$dae + cae - cex \infty dbx$$

add. utrinque cex

$$dae + cae \infty dbx + cex$$

div. utrinque per $db + ce$

& fit $\frac{dae + cae}{db + ce} \infty x$.

Ad reſolvendam hanc fractionem, fiat ut e ad d, ita b ad 4^{tam}, quæ vocetur f: eritque $fe \infty db$, adeoque $x \infty \frac{dae + cae}{fe + ce}$ ſeu $\frac{da + ca}{f + c}$. Deinde fiat ut $f + c$ ad a, ita $d + c$ ad x. Quod ipſum docet, ut ex datis lineis inveſtigetur quæſita linea AF, ducendam eſſe ex B lineam BH ipſi FED parallelam, donec occurrat productæ ACD in H. Cum enim ſtatuendum ſit ut e ad d, hoc eſt, ut CE ad CD, ita b ſeu CB ad $4^{tam} f$: patet hanc fore ipſam CH. Ac proinde ſi porrò fiat ut $f + c$ ad a, hoc eſt, ut AH ad AB, ita $d + c$ ſeu AD ad x: manifeſtum eſt inveniri hinc quantitatem quæſitæ lineæ AF; ita ut hìc ſicut in duobus præcedentibus Problematîs demonſtratio ex ſola proportionalium applicatione per ſe perſpicua ſit.

Quòd ſi autem quis alio operandi modo aut etiam eodem ſed aliarum linearum ductu quæſitam lineam AF invenire deſideret, obſervare poterit ea, quæ à nobis in antecedenti Problemate indicata ſunt.

Cæterùm cum & praxis hujus Problematis in extruendis fortalitiis, chomatibus, promontoriis, aliiſve, non parvi uſus exiſtat: nimirum, ubi in fluvio, mari, aut locis paludoſis à certo

puncto ceu termino recta linea determinari debet, datum continens virgarum pedúmve numerum: non abs re fuerit, si & illius praxin paucis hic explicavero, præsertim cum absque ullo instrumento Mathematico negotium hoc expedire liceat.

Ponamus itaque in directum ipsius A C à C usque ad D definienda esse recta C D, continens 10 perticas seu virgas. In quem finem erectis tribus baculis, A, C, & B, efformantibus triangulum qualecunque A B C, ac inter B & C erecto ubicunque quarto E, si mensurentur A B, B C, A C, & C E, sitque, ex. gr., A B ∞ *a* ∞ 15, B C ∞ *b* ∞ 13, A C ∞ *c* ∞ 14, & C E ∞ *e* ∞ 5 perticarum seu virgarum: oportebit ex his juxta & ipsâ C D ∞ *d* ∞ 10 quærere longitudinem lineæ A F, perinde ut supra atque ex sequenti operatione videre est.

CE CD CB — Add.
5 —— 10 —— 13 / ad CH. 26 — AC. 14
add. AC. 14 — AB — CD. 10
AH. 40 —— 15 —— AD. 24 / ad AF. 9.

Hinc si ab A versùs B in recta A B mensurentur 9 perticæ seu virgæ, atque in F hujus mensurationis termino baculus erigatur, fiet, ut, si à C in directum ipsius A C progrediamur, extruendo aggerem aut etiam navigando cum scapha, donec perventum fuerit in directum ipsius F E, recta C D tunc 10 perticarum seu virgarum sit futura. qualis requirebatur.

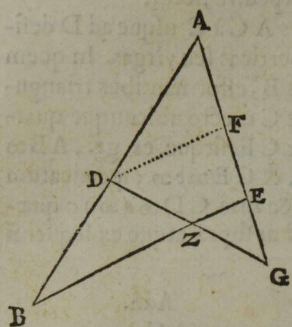
Qui plura hujus generis Problemata videre desideret, adeat Appendicem nostram de Simplicium Problematum constructione, quam unà cum Exercitationibus nostris Mathematicis haud ita pridem in lucem emisimus, ubi ista fusiùs pertractantur, etiam sine ullius calculi adjumento.

PROBLEMA,

cujus solutione innotescit, quâ ratione priora duo Theoremata 11mi Capitis 1mi libri Almagesti PTOLEMÆI *inventa fuerint seu inveniri possint.*

In rectas A B, A G ductis utcunque rectis B E, D G, se mutuò decussantibus in Z, detur ratio G D ad D Z,

ut a ad b, nec non ratio ZB ad BE, ut c ad d: oporteatque invenire rationem GA ad AE.



Series *Analyseos.*

Esto GD ∞ a

DZ ∞ b, eritque ZG ∞ $a-b$

BZ ∞ c

BE ∞ d, eritque ZE ∞ $d-c$

AG ∞ x

& AE ∞ y, eritque EG ∞ $x-y$.

Ductâ DF parallelâ BE, erit per 2 sexti

ut GZ ad ZD, ita GE Ex AE. y

$a-b$ —— b —— $x-y$ / ad EF. $\frac{bx-by}{a-b}$ } subtr.

rel. AF. $\frac{ay-bx}{a-b}$.

Tum fiat propter similia △la GZE & GDF

ut GZ ad ZE, ita GD / ad DF. $\frac{ad-ac}{a-b}$.

$a-b$ — $d-c$ —— a

Quibus sic constitutis, erit ex similitudine △lorum DAF & BAE

ut DF ad AF, ita BE ad AE

$\frac{ad-ac}{a-b}$ — $\frac{ay-bx}{a-b}$ —— d / y.

Et fit per 16 sexti

$$\frac{ady-acy}{a-b} \infty \frac{ady-bdx}{a-b}.$$

Hoc est, omisso communi denominatore $a-b$

erit $ady-acy \infty ady-bdx$.

Unde dempto utrinque ady, ac reliquis hinc inde translatis, ut signo + adficiantur

habebitur $bdx \infty acy$.

Quæ æqualitas in proportionem sic resolvitur

ut x ad y, ita ac ad bd.

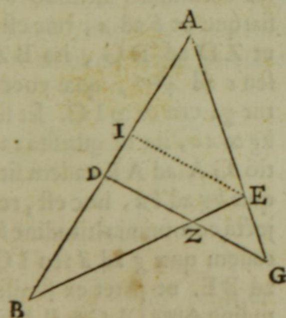
Quod

Quod ipsum docet, rationem quæsitam G A ad A E seu *x* ad *y* esse compositam ex ratione G D ad D Z seu *a* ad *b*, & ex ratione Z B ad B E seu *c* ad *d*, id est, rationem G A ad A E per 23 sexti esse eandem, quàm rectanguli sub G D, B Z seu *ac* ad rectangulum sub B E, D Z seu *bd*. Atque ita constat, quo pacto primum dictorum Theorematum inventum fuerit seu inveniri possit. Id autem ex Rheinoldi versione ita sonat.

„ *In duas rectas lineas AB & AG deductæ duæ rectæ lineæ BE & GD secent se mutuò in puncto Z. Dico quòd ratio GA ad AE composita est ex ratione GD ad DZ, & ex ratione ZB ad BE.*

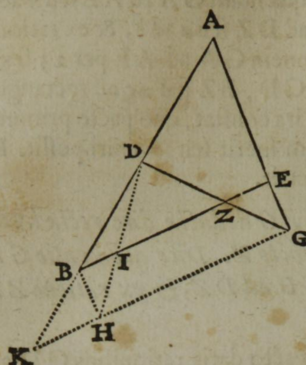
Hinc postquam innotuit, quo pacto datis rationibus G D ad D Z, & Z B ad B E etiam dari intelligatur ratio ipsius G A ad A E, utpote quæ ex datis hisce rationibus est composita: haud inutile fuerit, si ulteriùs hìc ostendam, quibus datis lineis hæc quæsita ratio exprimatur, quandoquidem ratio dari dicitur cui eandem exhibere valemus.

In quem finem si inventa ratio *ac* ad *bd* ad communem altitudinem redigatur, quod quidem quadrupliciter fieri potest, sumendo ad hoc aliquam ex datis lineis, obtinebitur quæsita ratio in simplicissimis terminis.



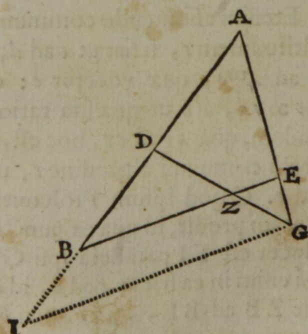
Etenim assumendo communem altitudinem *c*, si fiat ut *c* ad *d*, ita *b* ad 4tam, quæ vocetur *e*: erit *ce* ∞ *bd*, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ *ac* ad *ce*, hoc est, rejectâ communi altitudine *c*, ut *a* ad *e*. Quod ipsum Ptolemæi figuram prodit, in qua ex puncto E ducta est E I parallela ipsi G D. Si enim in ea fiat ut *c* ad *d*, id est, ut Z B ad B E, ita D Z seu *b* ad 4tam *e*, erit ea linea E I; ita ut G D ad E I seu *a* ad *e* quæsitam rationem manifestet, eandem quippe quæ est ipsius G A ad A E. Ut patet ex 4ta sexti, propter similitudinem △rum D A G & I A E.

Sic etiam assumendo communem altitudinem *a*, si fiat ut *a* ad *b*,



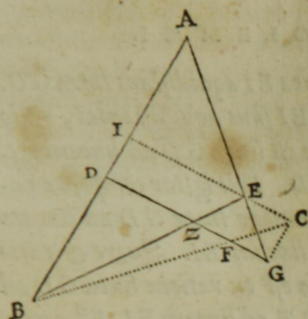
hoc eſt, ut D G ad D Z, ita H G vel B E ſeu *d* ad 4^{tam}, quæ vocetur *f*: erit ea ∞ Z I. Et ſit *a f* ∞ *b d*, ita ut quæſita ratio ſit eadem, quæ *a c* ad *a f*, hoc eſt, rejectâ *a* communi altitudine, eadem quæ *c* ad *f* ſeu B Z ad Z I. Hanc autem eandem eſſe, quam ipſius G A ad A E, ita patet.

Productis namque A B, G H donec coëant in K, erit propter ſimilitudinem △rum B D Z, K D G, lineamque D H ſimiliter in utroque ductam, ut B Z ad Z I, ita K G ad G H ſeu B E. Ut autem K G ad B E, ita eſt, propter ſimilitudinem △rum K A G & B A E, quoque G A ad A E. Quare etiam B Z ad Z I erit, ut G A ad A E. Unde liquet, ſi *a* pro communi altitudine ſumatur, ducendam eſſe ex G rectam G H ipſi B E parallelam, donec occurrat rectæ ex B ductæ ipſi A G parallelæ in H: eritque, junctâ H D, B Z ad Z I ratio quæſita.



Haud ſecus, ſi aſſumatur communis altitudo *b*, fiatque ut *b* ad *a*, hoc eſt, ut Z D ad D G, ita B Z ſeu *c* ad 4^{tam}, quæ vocetur *g*: erit ea ∞ I G. Et ſit *b g* ∞ *a c*, ita ut quæſita ratio G A ad A E eadem ſit, quæ *b g* ad *b d*, hoc eſt, rejectâ communi altitudine *b*, eadem quæ *g* ad *d* ſeu I G ad B E. ut patet ex ſimilitudine △rum I A G & B A E. Quod ipſum arguit, ſumendo *b* pro communi altitudine, ducendam eſſe ex G rectam G I ipſi B E parallelam, donec occurrat productæ A B in I, ut habeatur ratio quæſita I G ad B E.

Nec

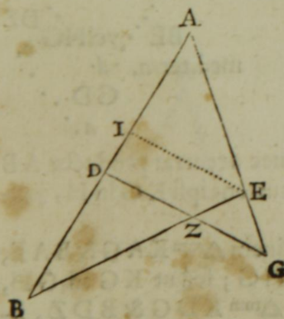


Nec aliter fit, si, assumptâ communi altitudine *d*, fiat ut *d* ad *c*, hoc est, ut BE ad BZ, ita GD vel IC seu *a* ad 4^tam, quæ vocetur *b*: erit ea ∞ DF. Et fit *db* ∞ *ac*, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ *db* ad *bd*, hoc est, rejectâ communi altitudine *d*, eadem quæ *b* ad *b* seu DF ad DZ.

Hanc autem eandem esse, quam GA ad AE, ita patet.

Est enim, propter similitudinem △^rum BDF & BIC, lineamque BE in utroque similiter ductam, ut DF ad DZ ita CI seu DG ad IE. Ut autem DG ad IE, ita est, propter similitudinem △^rum DAG & IAE, GA ad AE. Quocirca & DF ad DZ erit, ut GA ad AE. Atque ita liquet, sumendo *d* pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam GC ipsi BA parallelam, donec occurrat rectæ per E ipsi DG parallelæ in C, rationem quæsitam esse DF ad DZ.

Cæterùm ut pateat, qua ratione demonstratio præcedentis Theorematis, qualis à Ptolemæo affertur, ex allatis deduci possit; ut & quo pacto exinde plures alias demonstrationes similes conficere liceat: visum fuit eandem unà cum aliis tribus, à me deductis, hic subjungere, calculique vestigia, quibus innituntur, simul hic adhibere atque patefacere.



Ut supra est
ZB BE DZ IE
c——*d*——*b*, *e*
& *ce* ∞ *bd*.

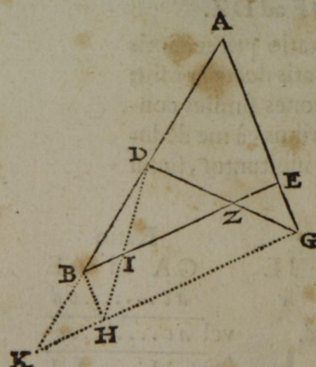
Ratio
GA ad AE
ac .... *bd*
vel *ac* .... *ce*
seu GD EI
a .... *e*
DZ BE
med. term. *b* *d*.
ZB
c

 De-

Demonstratio PTOLEMÆI.

„ *Ducatur enim per punctum E linea E I æquidistans lineæ G D.*
„ *Quoniam igitur lineæ GD & EI sunt æquidistantes, ratio*
„ *lineæ G A ad A E eadem est, quæ est lineæ G D ad lineam E I.*
„ *Adsumatur autem deforis linea Z D. Erit igitur composita ra-*
„ *tio lineæ G D ad lineam E I ex ratione lineæ G D ad lineam*
„ *D Z, & ex ratione lineæ D Z ad lineam E I. Quare & ratio*
„ *lineæ G A ad lineam A E composita est ex ratione lineæ G D ad*
„ *lineam D Z, & ex ratione lineæ D Z ad lineam E I. Est autem*
„ *& ratio lineæ D Z ad E I eadem rationi lineæ Z B ad lineam*
„ *B E, cum æquidistantes sint lineæ E I & Z D. Ratio igitur li-*
„ *neæ G A ad lineam A E composita est ex ratione lineæ G D ad*
„ *lineam D Z, & ex ratione lineæ Z B ad lineam B E. Quod*
„ *erat demonstrandum.*

Aliter.



Ut supra est
GD DZ BE vel HG ZI
a — *b* —— *d* / *f*
& *af* ∞ *bd*.

Ratio
GA ad AE
ac ...... *bd*
vel *ac* ...... *af*
BZ ZI
seu *c* .... *f*

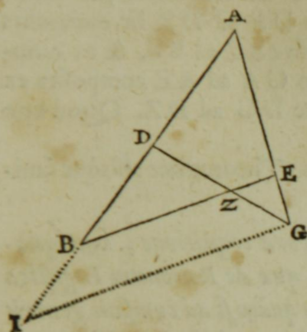
BE vel HG DZ *b*.
med. term. *d*
GD
a.

Ductâ GK parallelâ ipsi BE, donec occurrat productæ AB in K, agatur BH æquidistans AG, occurrens ipsi KG in H, jungaturque HD, secans BE in I.

Quoniam itaque, propter similitudinem △rum KAG & BAE, GA est ad AE, sicut KG ad BE vel HG; sed ut KG ad GH, ita quoque est, propter similitudinem △rum KDG & BDZ, lineamque DH in utroque similiter ductam, BZ ad ZI. Quare etiam

etiam erit G A ad A E, ſicut B Z ad Z I. Hinc aſſumpta forinſecus lineâ B E, quoniam ratio B Z ad Z I compoſita eſt ex ratione B Z ad B E, & ex ratione B E vel H G ad Z I, id eſt, propter ſimilitudinem △rum H D G & I D Z, ex G D ad D Z: erit perinde ratio G A ad A E compoſita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione G D ad D Z. Quod erat oſtendendum.

Adhuc aliter.

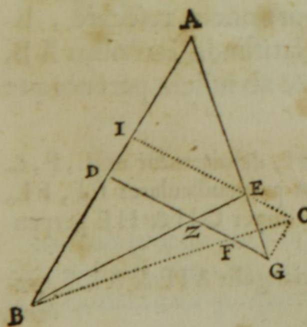


Ut ſupra eſt
DZ GD BZ IG
b——*a*——*c* / *g*
& *bg* ∞ *ac*.

Ratio
GA ad AE
ac ...... *bd*
vel *bg* ...... *bd*
IG BE
ſeu *g* .... *d*
GD . BZ .
a . *c* . med.ter.
. DZ
. *b*.

Etenim ductâ G I parallelâ B E, uſque dum occurrat productæ AB in I: erit, propter ſimilitudinem △rum I A G & B A E, ut G A ad A E, ita I G ad B E. Hinc cum, aſſumptâ forinſecus rectâ B Z, ratio ipſius I G ad B E compoſita ſit ex ratione I G ad B Z, id eſt, propter ſimilitudinem △rum I D G & B D Z, ex G D ad D Z, & ex ratione B Z ad B E: erit pariter ratio G A ad A E ex iiſdem rationibus compoſita. Quod erat oſtendendum.

Vel etiam hoc pacto:



Ut ſupra eſt
BE BZ GD DF
d — *c* — *a* / *b*
& *db* ∞ *ac*.

Ratio
G A ad A E
ac .... *bd*
vel *db* .... *bd*
DF DZ
ſeu *b* .... *b*
BZ . .
c . DG vel IC
. . *a* . med.ter.
.BE
.*d*.

 Ductâ

Ductâ G C ipsi B A parallelâ, donec occurrat rectæ I E C ipsi D G parallelæ in C, jungatur B, secans D G in F.

Quoniam itaque, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ D A G & I A E, G A est ad A E, sicut G D vel I C ad I E; at ut I C ad I E, ita quoque est, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ B I C & B D F, lineamque B E in utroque similiter ductam, D F ad D Z: erit etiam G A ad A E, sicut D F ad D Z. Assumatur jam forinsecus linea D G. Hinc cum ratio D F ad D Z sit composita ex ratione D F ad D G vel I C, sive B Z ad B E, & ex ratione D G ad D G: erit similiter ratio G A ad A E composita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione D G ad D Z. Quod erat ostendendum.

Idem pariter de 2do Ptolemæi Theoremate aliisque similibus est intelligendum.

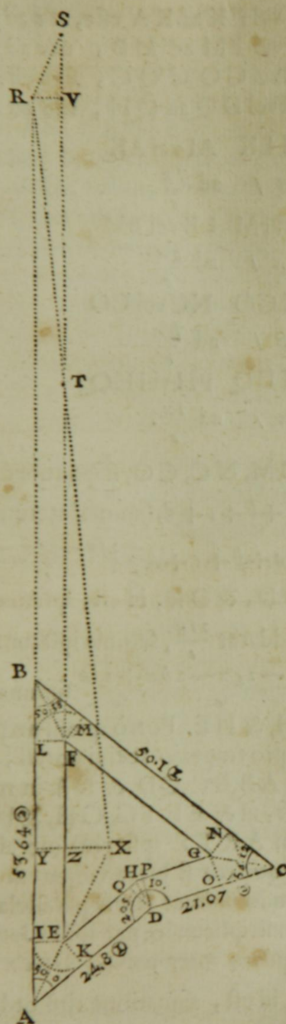
Vnde constat, præsuppositâ Algebræ cognitione, haudquaquam necessaria esse existimanda, quæ de Rationum Logistica communiter traduntur, non magis quàm si ad cujusvis generis quæstiones per Algebram solvendas multifaria addiscantur Theoremata: cum & invenire illa & demonstrare ipsius Algebræ sit munus, quam quidem excolendo non modò ingenium exercetur, sed res ipsa funditus eruitur, citra eam verò sæpissime illa ipsa Theoremata non satis feliciter adhibentur.

Problema.

Latifundii A B C D cognitis omnibus lateribus & angulis, ab eodem datam portionem resecare, lineis E F, F G, G H, & H E latifundii lateribus A B, B C, C D, & D A parallelis, & ab iisdem pari ubique intervallo distitis.

Junctis A E, B F, C G, & D H, demittantur ex E, F, & G super A B, B C, C D, & D A perpendiculares E I, F L, F M, G N, G O, & E K; at ex D super G H & H E perpendiculares D P & D Q.

Quoniam itaque in rectangulis triangulis A I E & A K E quadrata



drata quæ fiunt ex A I, I E nec non ex A K, K E quadrato ex A E *per* 47 *primi Elementorum* sunt æqualia, erunt & ipsa inter se æqualia. Est autem quadratum ex E I æquale quadrato ex E K, quippe ob æqualitatem rectarum E I, E K, æquale intervallum indicantium; Quare etiam quadratum ex A I quadrato ex A K æquale erit, adeoque & A I æqualis A K. Hinc cum tria latera trianguli A I E æqualia sint tribus lateribus trianguli A K E, erit quoque angulus I A E angulo K A E *per* 8 *primi* æqualis, ac proinde angulus B A D per rectam A E bifariam divisus. Haud secus liquet, angulos ad B, C, & D per rectas B F, C G, & D H bifariam divisos esse.

Series *Analyseos.*

Esto A B ∞ *a*
B C ∞ *b*
C D ∞ *c*
D A ∞ *d*
& E I, F L, F M, G N, G O, D P, D Q, vel E K ∞ *x*.

Jam cum propter datos angulos A, B, C, & D etiam eorum semisses dati sint, erit in unoquoque triangulorum ad angulos hosce constitutorum data quoque ratio laterum,

Pona-

Ponatur itaque EI ad IA vel EK ad KA esse, ut e ad f
FL ad LB vel FM ad MB, ut e ad g
GN ad NC vel GO ad OC, ut e ad h
& DP ad PH vel DQ ad QH, ut e ad i.

Tum fiat EI vel EK AI vel AK
ut e ad f, ita x / ad $\frac{fx}{e}$

FL vel FM LB vel BM
ut e ad g, ita x / ad $\frac{gx}{e}$

GN vel GO NC vel CO
ut e ad h, ita x / ad $\frac{hx}{e}$

DP vel DQ PH vel HQ
ut e ad i, ita x / ad $\frac{ix}{e}$.

Additis jam AI, AK, LB, BM, NC, CO, si ipsarum summa $\frac{2fx+2gx+2hx}{e}$ auferatur ex $a+b+c+d$, summa laterum AB, BC, CD, & DA, relinquetur $a+b+c+d\frac{-2fx-2gx-2hx}{e}$, summa rectarum IL, MN, OD, & DK, id est, ipsarum EF, FG, GP, & QE. Quibus si addatur $\frac{2ix}{e}$, summa ipsarum PH, HQ, erit $a+b+c+d\frac{-2fx-2gx-2hx+2ix}{e}$ summa laterum internorum EF, FG, GH, & HE. Porrò quoniam portio abscindenda, quæ vocetur k, pro trapezio accipi potest, cujus duo latera sunt parallela, fit ut si AB, BC, CD, & DA in rectam lineam AR junctim collocentur, ut & EF, FG, GH, & HE in rectam lineam ET, trapezium ARTE ipsi portioni abscindendæ k futurum sit æquale. Quocirca si juxta vulgarem regulam hujus area quæratur, addendo scilicet latera parallela AR & ET, & semissem summæ multiplicando per ipsius latitudinem EI seu x, habebitur æquatio inter $ax+bx+cx+dx$ $\frac{-fxx-gxx-hxx+ixx}{e}$ & k, id est, æquatione ritè ordinatâ, erit $xx \infty \frac{aex+bex+cex+dex}{f+g+h-i} - \frac{ke}{f+g+h-i}$. Cujus radices inveniuntur operando ulteriùs, quemadmodum pag. 7 hujus

Geo-

Geometriæ indicatur, quarum quidem major dum lineam exhibet quæsitâ EI manifestè majorem, idcirco meritò hìc erit negligenda.

Quoniam autem ex E, F, G, & D intervallis EI vel EK, FL vel FM, GN vel GO, & DP vel DQ descriptis circulis rectæ AI vel AK, LB vel BM, NC vel CO, & PH vel HQ tangentes sunt complementorum semissium datorum angulorum A, B, C, & D; fiet ut, si *e* pro radio sumatur, ipsæ *f*, *g*, *h*, & *i* dictas tangentes designent. Quod cum eodem modo de omnibus aliis figuris rectilineis intelligendum sit, à quibus hujusmodi portio resecari debet: haud difficulter poterimus, si angulos A, B, C similesque vocemus externos, at angulum D internum, ut & eos omnes, qui hujusce generis existunt, atque præter æquationis constitutionem spectemus insuper, quænam ad illam resolvendam sive ad quæsitam latitudinem ex ea obtinendam sint facienda, regulam inde generalem formare, quæ sic se habet.

Additis figuræ lateribus, multiplicetur summa per radium 100000, productumque dividatur per summam tangentium, angulorum qui semissium datorum sunt complementa, cùm videlicet dati anguli omnes sunt externi, aut per earundem differentiam, quum externi ac interni existunt, & fit primum inventum.

Deinde multiplicatâ areâ portionis abscindendæ per radium 100000, dividatur productum per prædictam summam vel differentiam tangentium, & fit secundum inventum. Quo subducto à quadrato semissis primi inventi, si reliqui radix ab eodem semisse auferatur, relinquetur latitudo quæsita.

Inventâ igitur per Algebram viâ, quâ Problema propositum solvendum sit, ipsius veritas ex sequentis calculi applicatione, quæ ab ea parùm est aliena, manifesta fiet; si modò ibidem consideraverimus, completo parallelogrammo ARSE, productisque AE, RT donec coëant in X, rectam ST, duplum supra dictæ summæ vel differentiæ tangentium referre, atque demissis perpendicularibus RV & XY rectam ST ad RV, ob similitudinem triangulorum STR & ARX, eam habere rationem, quam AR habet ad XY.

Angul.
A. 50. 0′ Add.
semissis. 25. 0′, ejus Tang. Compl.
B. 50.38′ AI vel AK est 214451
semissis. 25.19, ejus Tang. Compl.
C. 54.12′ LB vel BM est 211392
semissis. 27. 6, ejus Tang. Compl.
NC vel CO est 195417
D. 205.10′ 621260
semissis. 102.35, ejus Tang. Compl. } subtr.
PH vel HQ est 22322
differentia 598938
2 Rad. RV.
partes ST. 1197876—100000—AR. 149|61 (2)

Add.		
AB.	53	64
BC.	50	1
CD.	21	07
DA.	24	8
AR.	149	61 (2)

multipl.
AR. 14961 (2)
ad XY. 1249 (2).
134649
59844
29922
14961
product. 1868|6289 (4)
semissis seu triang. ARX. 934|3144 (4)
subtr. part. resec. seu trap. ARTE. 600|

Ut △ ARX seu $\frac{1}{2}$ XY, AR ad □ XY seu XY, XY, vel, relicta communi altitudine XY ut $\frac{1}{2}$ AR ad XY, sive etiam, propter simil. △rum STR & ARX ut $\frac{1}{2}$ ST ad RV, ita

598938—100000—rel. triang. ETX. 334|3144 (4) / ad □ XZ. 55|81|78 (4)
eritque XZ. 7| 4| 7 (2).

Hinc subducta XZ seu 747 (2) ex XY seu 1249 (2), relinquetur 502 (2) pro YZ latitudine quæsita portionis abscindendæ.

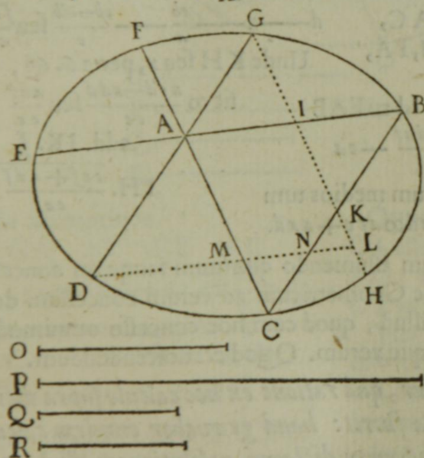
Cæterùm cum non absimili modo à data qualibet figura rectilinea portio datæ magnitudinis abscindi possit, aut etiam quæ ipsius figuræ certam partem sive partes contineat, lineis quibusdam duntaxat lateribus parallelis & ab iisdem æquali intervallo distantibus: plura hac de re afferre supervacaneum duximus, præsertim cum materiam hanc nec non determinationes eò spectantes jam sæpius in Lectionibus nostris Publicis abundè pertractaverimus

verimus, eaque occasione illa multis etiam jam diu innotuisse certò sciverimus.

THEOREMA,

quod ad solutionem artificiosissimam Problematis pag. 372 ut concessum supponitur.

Cum in rimanda olim solutione Problematis p. 372 nonnulla deprehendissem, quæ ad eandem ut concessa supponebantur, eaq́; post commentarios meos in hanc Geometriam Theoremate ad id Geometricè resoluto corroborâssem: visum fuit calculum è quo eandem resolutionem tunc deprompsi hic in medium afferre, ac quo pacto idem à me sit præstitum eâ quâ potero perspicuitate cuivis ab oculos ponere. In quem finem si huc revocetur Theorema jam dictum unà cum illis, quæ ad explicationẽ ejus p. 369 & 370 ulteriùs sunt allata, inspiciendus erit deinceps sequens calculus.



Assumpto quæsito ut vero, hoc est, C A esse ad A F, sicut C B ad A G ducatur porrò D L parallela A B, secans CA, C B in M & N, ac occurrens ipsi G H in L, ponaturque D A ∞ y.

Deinde calculus sic procedat

Ex assumptione est
CA AF CB AG
c —— d —— b / ad $\frac{db}{c}$ ∞ z.

Ex similitudine $\triangle$lorum B A C & A I G est
BC CA AG GI
b —— c —— $\frac{db}{c}$ / ad d. Unde I K erit ∞ $c - d$, pro qua brevitatis causâ scribatur f.

Et apparet ex hac assumptione G I inveniri æqualem F A.

 item-

itemque

CA AB GI IA

c —— a —— d / ad $\frac{ad}{c}$ } add.

1 *

Ex similitudine △rum CAB & KIB est

AE. e

EI. $\frac{ce+ad}{c}$ } Mult.

CA AB KI

c — a — f / ad IB. $\frac{af}{c}$

* 2

▭EIB. $\frac{ceaf+adaf}{cc}$

Denique ex natura Ellipsis, per 17. 3[tii] Conicorum Apollonii,

▭GIH est ad ▭FAC,

Seu, propter rectas GI, FA, supra æquales,

IH ad AC, ut ▭ EIB ad ▭EAB

$\frac{cef+adf}{ce}$ — c — $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ — ea

Et fit, multiplicando tum medios tum extremos, $ace+aad \infty ace+aad$.

Ex hypothesi est

BA AE BC AD

a —— e —— b / ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3[tii] Conicorum Apollonii, proportionalia sunt

▭FAC ▭GKH ▭DAG ▭CKB

dc —— cx —— yz — bz — zz

seu, rejectis communibus altitudinibus AC, GK; & AG, CK

FA KH DA KB

d —— x —— y —— b — z

hoc est, restitutis valoribus ipsarum y & z

d —— x —— $\frac{eb}{a}$ —— $\frac{cb-db}{c}$ seu $\frac{fb}{c}$

Unde KH seu x, per 16. 6[ti],

fit $\infty \frac{acd-add}{ce}$ seu $\frac{adf}{ce}$

add. IK. f.

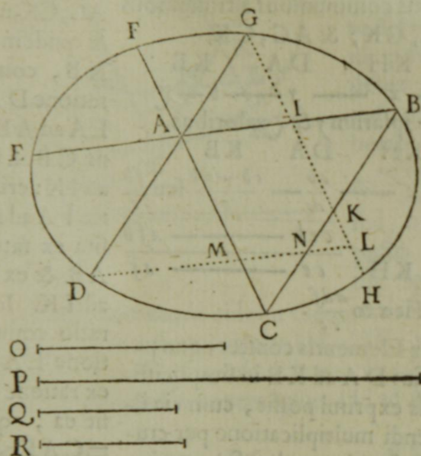
IH. $\frac{cef+adf}{ce}$

Id quod arguit, cum assumendo quæsitum tanquam concessum per calculum hunc Geometricum ad verum concessum devenerimus, quæsitum illud, quod cum hoc concesso omnimode connectitur, esse quoque verum. Quod erat ostendendum.

Porrò ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo supra dicta resolutio à me deducta fuerit: haud gravabor eundem calculum hìc ulteriùs ita disponere, dictamq; resolutionem illi à latere sic adhibere, ut cuivis sedulò hæc inspicienti enucleatè appareat, quisnam inter illum & hanc resolutionem mutuus consensus existat. Præsertim cum hujus resolutionis inventio deinde mihi ansam, complures alias demonstrationes Geometricas

con-

conficiendi, subministraverit; atque ipsa etiam artificium detexisse mihi visa sit, quo Veteres, in multis difficilioribus demonstrationibus concinnandis, usi sunt. Qui quidem id unicè studuisse videntur, quò sua inventa eorumq; demonstrationes posteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipsa invenerint ac demonstrationibus muniverint, prorsus supprimerent & absconderent.



Ex assumptione
CA AF CB AG
c —— d —— b, ad $\frac{db}{c} \propto z$

Et permutando per 16. 5
CA CB AF AG
c —— b —— d, ad $\frac{db}{c}$

Ex similitudine △rum BAC, AIG
BC CA AG GI
b —— c —— $\frac{db}{c}$, ad d.

Et convertendo per Cor. 4. 5
CA CB GI AG
c —— b —— d, ad $\frac{db}{c}$

Quoniam igitur supponitur CA esse ad AF, sicut CB ad AG; erit etiam permutando CA ad CB, sicut AF ad AG. Jam quia, ex similitudine △rum BAC & AIG, BC est ad CA, sicut AG ad GI; & convertendo CA ad CB, sicut GI ad AG: erit AF per 9. 5ti ipsi GI æqualis. Eodem modo æquales erunt EA & DM.

Quia hic ex assumptione reperitur GI exprimi per eandem quantitatem quam AF, colligitur inde ipsas æquales esse.
Haud secus æquales erunt EA & DM.

Ex hypothesi

BA AE BC AD

a —— e —— b / ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3tii Conicorum Apollonii

▭FAC ▭GKH ▭DAG ▭CKB

dc —— cx —— yz —— bz — zz

H.e., rejectis communibus altitudinibus A C, G K; & A G, C K,

FA KH DA KB

d —— x —— y —— b — z

Et restitutis ipsarum y & z valoribus

FA KH DA KB

d —— x —— $\frac{eb}{a}$ — $\frac{cb-db}{c}$ seu $\frac{fb}{c}$

ceb ———— afb

KH ce ———— af

Fit $x \infty \frac{adf}{ce}$.

Jam ut ex Elementis constet, quo pacto ratio ipsius D A ad K B in simplicissimis terminis exprimi possit, cum via illam inveniendi multiplicatione per crucem (quemadmodum vulgò fit) omnino sit Algebraïca: calculum hìc apponam, è quo ipsæ D A & KB resultant.

Porrò cum ex natura Ellipsis ▭ F A C sit ad ▭ G K H, seu, propter rectarum A C, G K æqualitatem, FA ad KH, sicut ▭ D A G ad ▭ C K B, h.e., propter æqualitatem rectarum AG, CK, ut D A ad KB; & quidem ratio D A ad K B, composita sit ex ratione D A ad C B seu E A ad A B, & ex ratione C B ad K B seu C A ad I K: erit quoque ratio F A ad K H composita ex ratione E A ad A B, & ex ratione C A ad I K. Ideoque cum ratio composita ex ratione E A ad A B, & ex ratione C A ad I K, sit ea, quam habet ▭C A E ad ▭KI, A B: erit similiter ratio ipsius F A ad K H ea, quam habet ▭ C A E ad ▭ K I, A B.

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a}$

CA IK BC KB

c — f — b / ad $\frac{fb}{c}$

EA AB

e —— a

CA IK

23.6. c —— f

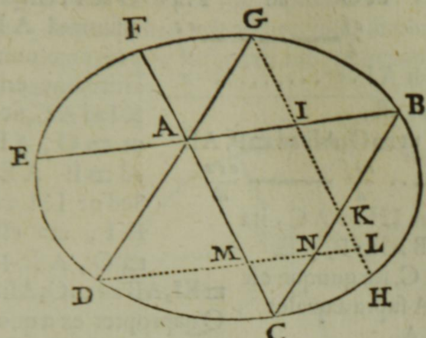
▭CAE ▭KI, AB

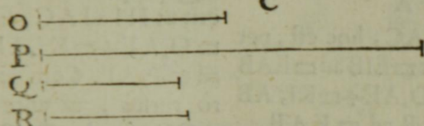
ce —— af

Ubi apparet, cum in utraque hac proportionis regula idem terminus B C ipsis A D & K B præcedat, quod ratio ipsius A D ad KB, per hujus B C interpositionem, sit composita ex ratione A D ad B C seu E A ad A B, hoc est, e ad a, & ex ratione B C ad K B seu C A ad I K, hoc est, c ad f. Ac proinde, cum ratio ex his composita, per 23.6, sit eadem rationi, quam habet ▭CAE ad ▭KI, A B, seu ce ad af: erit quoque

que

que ratio ipsius F A ad K H seu d ad x eadem, quam habet ▭ C A E ad ▭ K I, A B, seu ce ad af.





Ad comparandam I H cum A C, quia, inventâ K H ∞ $\frac{adf}{ce}$, ad K H addi priùs debet I K ∞ f, ut habeatur I H ∞ $\frac{cef + adf}{ce}$; sed hoc pacto ratio ipsius I H ad A C non satis commodè videtur Geometricè explicabilis: quæsivi priùs rationem ipsius I H ad I K; inde per compositionem rationis conversam, & per alias denique comparationes venio ad rationem ipsius I H ad A C, ut sequitur.

Esto K I ad F A, K H

f ———— d x

ut O ad C A.

3* $\frac{cf}{d}$ ———— c

Mult. per A E. e . . . . e

hoc est, ut ▭ O, A E ad ▭ C A E ▭ K I, A B

per 1. 6. $\frac{cef}{d}$ ———— ce . . . . . af

Unde ex æquo & per compositionem rationis conversam erit

Ut K I + K H seu I H ad K I,

$f + x$ ———— f

sic ▭ O, A E + ▭ K I, A B ad ▭ O, A E.

$\frac{cef}{d} + af$ ———— $\frac{cef}{d}$

Esto jam K I ad F A, sicut linea O ad C A. Unde, assumptâ A E pro communi altitudine, erit K I ad F A, sicut ▭ sub O & A E ad ▭ C A E. Erat autem F A ad K H, sicut ▭ C A E ad ▭ K I, A B. Quare ex æquo erit ut K I ad K H, sic ▭ O, A E ad ▭ K I, A B; & per compositionem rationis conversam K I + K H seu I H ad K I, sicut ▭ O, A E + ▭ K I, A B, ad ▭ O, A E.

Sit

IH Sit KI ad AC,
$f+x$ . . . . f ——— c
ut O ad P. 4*
$\frac{cf}{d}$ ——— $\frac{cc}{d}$
Mult. per AE. e . . . . e
hoc eſt,
▭O, AE+▭KI, AB ut ▭O, AE ad ▭P, AE
$\frac{cef+adf}{d}$ . . . . $\frac{cef}{d}$ ——— $\frac{cce}{d}$

Unde ex æquo erit ut IH ad AC, ita ▭O, AE+▭KI, AB ad ▭P, AE.

Sed ut IH ad AC, ita quoque eſt propter rectas IG & FA ſupra æquales
mult. per IG . . . . . FA
per 1.*6.* ▭GIH ad ▭FAC, hoc eſt, per 17.3[tii] Conic. Apoll., ut ▭EIB ad ▭EAB

Quocirca erit ut ▭O, AE+▭KI, AB ad ▭P, AE, ita ▭EIB ad ▭EAB.

Deinde ſit ut KI ad AC, ita O ad P. Unde, aſſumptâ AE pro communi altitudine, erit KI ad AC, ſicut ▭O, AE ad ▭P, AE. Sed ut IH ad KI, ita eſt ▭O, AE+▭KI, AB ad ▭O, AE. Quapropter ex æquo erit ut IH ad AC, ſic ▭O, AE+▭KI, AB ad ▭P, AE. Cum verò rurſus, ut ante, ▭GIH ſit ad ▭FAC, ſicut ▭EIB ad ▭EAB; & quidem IG & AF, ut ſupra, æquales ſint oſtenſæ: erit quoque IH ad AC, ſicut ▭EIB ad ▭EAB. Ut autem IH ad AC, ſic quoque erat ▭O, AE+▭KI, AB ad ▭P, AE. Quocirca erit ut ▭O, AE+▭KI, AB ad ▭P, AE, ita ▭EIB ad ▭EAB.

Fiat jam, ut AE ad AB, ita KI ad Q
e —— a —— f, $\frac{af}{e}$. 5*
eritque per 16.*6.* ▭KI, AB ∞ ▭Q, AE.
Adeoque ut
▭O, AE+▭KI, AB, ſeu Q, AE ad ▭P, AE,
hoc eſt, rejectâ communi altitudine AE,
ut O+Q ad P, ſic ▭EIB ad ▭EAB.
$\frac{cf}{d}+\frac{af}{e}$ ——— $\frac{cc}{d}$ ——— $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ — ea

Fiat jam ut AE ad AB, ita KI ad Q: eritque ▭KI, AB æquale ▭Q, AE. Hinc ut ▭O, AE plus ▭KI, AB ſeu Q, AE, ad ▭P, AE, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem AE, ut O+Q ad P, ſic ▭EIB ad ▭EAB.

Explicita itaque eſt ratio, quam habet ▭GIH ad ▭FAC, quippe oſtenſa eſt eadem quæ ipſius IH ad AC, ſeu O+Q ad P.

Quo-

Quocirca jam ratio explicanda restat, quæ est inter ▭ EIB & ▭ EAB.

Quoniam autem in hac explicanda ad 4^or dimensiones ascenditur, deveniendum erit ad pauciores dimensiones, ut tota resolutio duntaxat per rectarum aut planorum considerationem absolvatur.

EI seu EA + AI ——— EA
$\frac{ce+ad}{c}$ ——— e

23. 6. IB ——— AB
$\frac{af}{c}$ ——— a

▭ EIB seu ▭ sub EA + AI in IB ——— ▭ EAB
$\frac{ceaf+adaf}{cc}$ ——— ea

Ut EI seu EA + AI est ad EA,
$\frac{ce+ad}{c}$ ——— c

Mult. per CA. c c

sic ▭ EA, CA + ▭ AI, CA est ad ▭ CAE.
$ce+ad$. ce

Vel, si pro ▭ EA, CA, propter similitudinem △rum CAB & AMD, ubi CA est ad AB,

Porro quoniam ratio ▭li EIB ad ▭ EAB composita est ex ratione EI seu EA + AI ad EA, & ex ratione IB ad AB; & quidem EA + AI ad EA, si com-

sicut AM ad MD seu EA scribatur ▭ BAM,
sicut ▭ BAM + ▭ CAI ad ▭ BAM.

Vel rursus, si pro ▭ CAI, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ BAC & AIG, scribatur ▭ BA, GI, sicut ▭ BAM + ▭ BA, GI ad ▭ BAM, hoc est, relictâ communi altitudine BA, sicut AM + GI, hoc est, GL ad AM.

Vide supra ad notam 1*

communis assumatur altitudo CA, sit sicut ▭ CAE, seu BAM, + ▭ CAI seu BA, GI ad ▭ CAE seu BAM, hoc est, relinquendo communem altitudinem BA, sicut AM + GI seu GL ad AM; at verò IB ad AB, sicut ▭ IB, CA seu KI, AB ad ▭ CAB, hoc est, destruendo communem altitudinem AB, sicut KI ad CA: Erit quoque ratio ▭^{li} EIB ad ▭ EAB, hoc est, ipsius O + Q ad P, composita ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA.

Ut IB est ad AB,

$\frac{af}{c}$ ———— a

Mult. per CA

c c

ita ▭ IB, CA est ad ▭ CAB.

af ———— ca

Vel, si pro ▭ IB, CA, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ CAB & KIB, scribatur ▭ KI, AB, sic ▭ KI, AB ad ▭ CAB, hoc est, relictâ communi altitudine AB, sicut KI ad CA.

Vide supra ad notam 2*

Constat igitur, rationem ▭^{li} EIB ad ▭ EAB seu ipsius O + Q ad P esse compositam ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA.

Jam quia superior ratio ipsius O + Q ad P nulli rationi linearum, quæ in Ellipsi ductæ sunt, respondet; neque etiam adhuc luculenter patet, eam, si cum ratione GL ad AM, aut KI ad CA confertur, ex his compositam esse, quemadmodum ex assumptis jam fuit deductum; fiat præterea ut

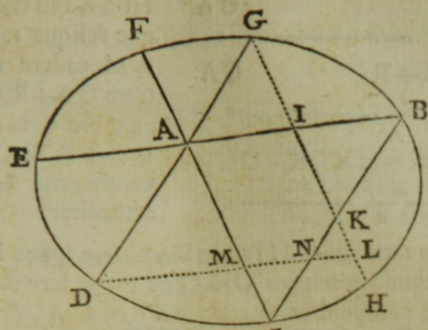
KI ad Q, sic FA ad R.

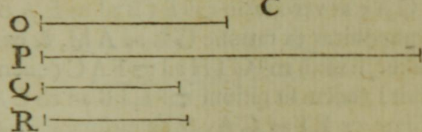
f —— $\frac{af}{e}$ —— d / $\frac{ad}{e}$. 6*

eritque, per 16. 6^{ti},

▭ KI, R ∞ ▭ Q, FA.

Denique fiat ut KI ad Q, sic FA ad R: eritque ▭ KI, R æquale ▭ Q, FA. Ac proinde cum O + Q ad P,





Ut O + Q est ad P,

$\frac{cf}{d} + \frac{af}{e}$ ——— $\frac{cc}{d}$

Mult. per F A. d. . . . . . d

sic ▭ O, F A seu K I, C A, + ▭ Q, F A seu K I, R est ad ▭ P, F A seu □ C A.

Vide supra ad notam 3 * $cf + \frac{daf}{e}$ ——————— cc

Cur ▭ P, F A sit ∞ □ C A, ita concluditur

3 * Est namque K I ad F A, ut O ad C A;

f —— d —— $\frac{cf}{d}$ —— c

& convertendo

F A ad K I, C A

d —— f c

ut C A ad O. P

c —— $\frac{cf}{d}$ . . . . . $\frac{cc}{d}$ Vide supra ad notam 4*

Unde ex æquo erit

ut F A ad C A, ita C A ad P.

d —— c —— c —— $\frac{cc}{d}$

Ac proinde, per 17. 6ti, ▭ P, F A ∞ □ C A.

ad P, assumendo communem altitudinem F A, sit sicut ▭ O, F A seu K I, C A, + ▭lo Q, F A seu K I, R ad ▭ P, F A seu □ C A: Erit ratio cōposita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A eadem rationi ▭li K I, C A + ▭ K I, R ad □ C A, hoc est, eadem rationi, quæ componitur ex ratione K I ad C A, & ex ratione C A + R ad C A. Ideoque si communis auferatur

KI ——— CA
f ——————— c
23.6. CA+R ——— CA
$c + \frac{ad}{e}$ ——————— c

▭ KI, CA + ▭ KI, R ——— □ CA
$cf + \frac{daf}{e}$ ——————— cc

ratio KI ad CA, erit quoque reliqua ratio GL ad AM eadem reliquæ rationi CA+R ad CA, hoc eſt, erit GL ad AM, ut CA+R ad CA. Quod verum eſſe deinceps ſic oſtenditur.

Hinc cum ratio ▭^{li} GIH ad ▭ FAC ſive ipſius IH ad AC eadem ſit oſtenſa quæ ipſius O+Q ad P, & hæc rurſus eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA+R ad CA; at verò ratio ▭^{li} EIB ad ▭ EAB eadem rationi, quæ componitur ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA: ſequitur, ſi ratio ▭^{li} GIH ad ▭ FAC (quemadmodum ſuppoſitum fuit) eadem ſit rationi ▭^{li} EIB ad ▭ EAB, rationem compoſitam ex KI ad CA, & ex ratione CA+R ad CA debere quoque eandem eſſe rationi, quæ ex GL ad AM, & ex KI ad CA componitur. Ac proinde, ſi utrobique communis auferatur ratio KI ad CA, rationem reliquam CA+R ad CA eandem quoque fore reliquæ rationi GL ad AM.

Hoc autem cum nondum per ſe evidens ſit, ſupereſt ut ipſum ſequenti argumentatione reſolvamus atque penitus manifeſtum reddamus.

Ex ſimilitudine △^{lorum} ABC & MDA eſt
AB ——— AC ——— MD ſeu AE ——— MA ſeu IL
a — c ——————— e / ad $\frac{ce}{a}$. Unde GL fit ∞ $d + \frac{ce}{a}$.

Ex ſimilitudine △^{lorum} ABC & IAG eſt
BA ——— AC ——— AI ——— IG ſeu AF
a ——— c ——— $\frac{ad}{c}$ ——— d

Ac proinde, per 16.6^{ti}, ▭ BAF ∞ ▭ CAI.

Ex ſimilitudine △^{lorum} GLD & AMD eſt
GL ad AM,
$d + \frac{ce}{a}$ ——————— $\frac{ce}{a}$

Quoniam enim, propter ſimilitudinem triangulorum GLD & AMD, eſt ut GL ad AM ita DL ſeu EI ad DM

ſicut D L ſeu E I ad D M ſeu E A;

$e + \frac{ad}{c}$ ———— e

mult. per C A. c c

Vel per 1. 2di ſicut ▭ E I, C A ſeu C A E + C A I ſeu AE, R ad ▭ CAE.

$ce + ad$ ———————— ce

hoc eſt, relictâ communi altitudine AE ſicut C A + R ad C A.

DM ſeu EA; ut autem EI ad EA, ita, aſſumptâ communi altitudine CA, ▭ EI, CA ſeu CAE plus ▭ CAI ſeu AE, R eſt ad ▭ CAE: Erit ut GL ad AM, ita ▭ CAE + ▭ R, AE ad ▭ CAE, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem AE, ſic CA + R ad CA.

Ex conſtructione eſt

Vide ſupra ad notam 6 *

KI Q FA R

f —— $\frac{af}{e}$ —— d / $\frac{ad}{e}$

Vide ſupra ad notam 5 *

itemque AE AB KI Q

e —— a —— f / $\frac{af}{e}$

Ideoque AE AB FA R

per 11. 5ti. e —— a —— d — $\frac{ad}{e}$

Ac proinde per 16. 6ti, ▭ B A F ꝏ ▭ AE, R.

Hinc cum ▭ B A F etiam ſit ꝏ ▭ C A I, erit ſimiliter ▭ A E, R ꝏ ▭ C A I.

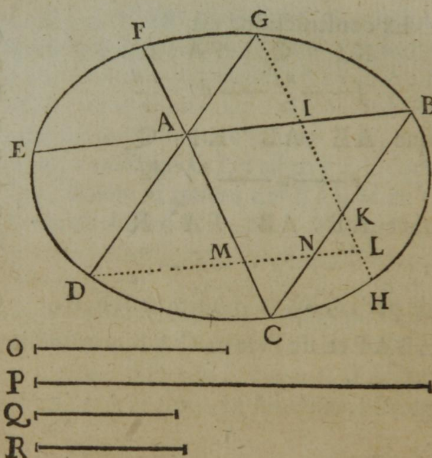
Patet itaque G L eſſe ad A M, ſicut C A + R ad C A. Ut erat propoſitum.

Quare cum hoc pacto, aſſumentes quæſitum tanquam verum, per reſolutionem Geometricam devenerimus ad verum conceſſum: ſequitur, quæſitum illud, quod cum conceſſo iſto omnimodè connectitur, verum eſſe. hoc eſt, umbram baculi C, quæ tranſibat per A, tranſiiſſe ſimiliter per B. Quod erat demonſtrandum.

Et hæc quidem, quæ Reſolutionem Geometricam Theorematis concernunt, quod ad ſolutionem Problematis pag. 372 ut conceſſum ſuppoſitum fuit. Cæterùm quoniam iis, qui cum Logicis ſtatuunt ex falſis etiam poſſe verum concludi, reſolutio hæc ad quæſiti oſtenſionem incerta videri poteſt: placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Syntheticè verificare, procedendo à conceſſis ad quæſita, prout ad hoc me inſtigavit præ-

stantissimus ac undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hartsingius, Iaponensis, quondam in addiscendis Mathematis discipulus meus solertissimus.

Demonstratio autem ipsa filûm calculi sequitur, qualis extat pag. 370 & 371, at eodem nonnihil hic immutato; ut appareat passim artificium, quo singula Geometricè explicari queant.



Positâ, ut ante, AD ∞ y

erit ut BA ad AE, ita BC ad AD

a —— e —— b / ad y seu $\frac{be}{a}$.

ac proinde per 16. 6ti.

▭ BA, AD, ▭ BC, AE

∝ ay ∞ be.

Ex natura Ellipsis per 17 Conicorum Apollonii

AD. y KB. $b - z$

AG. z AG vel CK z

est ▭ DAG. $\overline{yz}$ ad ▭ CKB. $\overline{bz - zz}$,

FA. d KH. x

AC. c AC vel KG. c

ut ▭ FAC. $\overline{cd}$ ad ▭ GKH. $\overline{cx}$.

Quoniam igitur ex hypothesi est BA ad AE, sicut BC ad AD: erit ▭lum sub extremis BA, AD ∝ æquale ▭lo sub mediis BC, AE. Deinde quoniam ex natura Ellipsis est, ut ▭ DAG ad ▭ CKB, sive, rejectâ communi altitudine AG vel CK, ut DA ad KB, ita ▭ FAC ad

AG AC

id est, rejectis communibus altitudinibus *z* & *c*,
erit ut D A ad K B, ita F A ad K H
y — *b* — *z* — *d l* ad *x*.

B A

sive, assumendo communem altitudinem *a*,
ut □ BA, AD seu □ BC, AE ad □ BA, KB, ita FA ad KH
α *ay* vel *be* — *ab* — *az* — *dl* ad *x*. δ

Esto jam K I ∞ *f*.
eritque propter similitudinem △rum B C A & B K I
ut B C ad C A, ita B K ad K I
b — *c* — *b* — *z l* ad *f* seu $\frac{cb - cz}{b}$. ac proinde per 16. 6ti.
add. H K. *x*
mult. H I. $\overline{f+x}$
per I G. *h*
Deinde sit I G ∞ *h*.
□ GIH. $fh + hx$

□ BC, KI □ CA, BK
ζ *bf* ∞ *cb* — *cz*.

eritque propt. simil. △rum B C A & A G I
ut B C ad C A, ita A G ad G I
b — *c* — *z l* ad *h* seu $\frac{cz}{b}$. ac proinde per 16. 6ti

Similiter esto A I ∞ *k*.
eritque propter simil. △rum B C A & A G I
ut B C ad B A, ita A G ad A I
b — *a* — *z l* ad *k* seu $\frac{az}{b}$. ac proinde per 16. 6ti

□ BC, IG □ CA, AG
β *bh* ∞ *cz*.

add. A E. *e*
mult. E I. $\overline{k+e}$
per I B. *l*
□ E I B. $kl + el$

□ BC, AI □ BA, AG
ε *bk* ∞ *az*.

Sit item I B ∞ *l*.
eritque propter simil. △rum B C A & B K I

ad □ GKH, id est, relictâ communi altitudine A C vel G K, ita F A ad K H; & quidem D A ad K B, si B A pro communi altitudine sumatur, sit sicut □ BA, AD seu α B C, A E ad □ B A, K B: erit ut □ B C, A E ad □ B A, K B, ita F A ad K H.

Porrò cum ex similitudine △rum B C A & B K I, B C sit ad C A, sicut B K ad K I: erit □ sub B C, K I æquale □lo sub C A, B K. Eâdem ratione cum B C sit ad B A, sicut B K ad B I: erit □ sub B C, B I æquale □lo sub B A, B K.

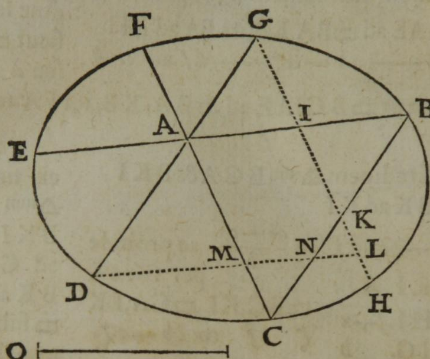
Haud secus cum similia sint △la B C A & A G I, ac idcirco B C ad C A, sicut A G ad G I: erit □ sub B C, G I æquale □lo sub C A, A G. Similiter cum B C sit ad

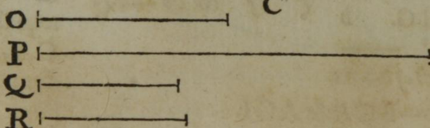
ut B C ad B A, ita B K ad B I

$b - a - b - z$, ad l seu $\frac{ab - az}{b}$. ac proinde per 16. 6[ti]

▭ B C, B I ▭ B A, B K

γ bl ∞ $ab - az$.





Ex natura Ellipsis per 17. 3[tii] Conic. Apollonii est ▭ F A C ad ▭ G I H, ut ▭ E A B ad ▭ E I B

cd —— $bf + bx$ —— ae, ad $kl + el$.

Est autem per 23. 6[ti] ratio ▭[li] F A C ad ▭ G I H

cd —— $bf + bx$

composita ex ratione F A ad I H seu I K + K H, &

d —— $f + x$

ex ratione C A ad G I, id est, assumendo commu-

c —— b

B C

nem altitudinem b, ex ratione ▭[li]

β

B C, C A ad ▭ B C, G I vel ▭ C A, A G, sive, reje-

bc —— bb seu cz

C A

ctâ communi altitudine c, ex ratione B C ad A G.

b —— z.

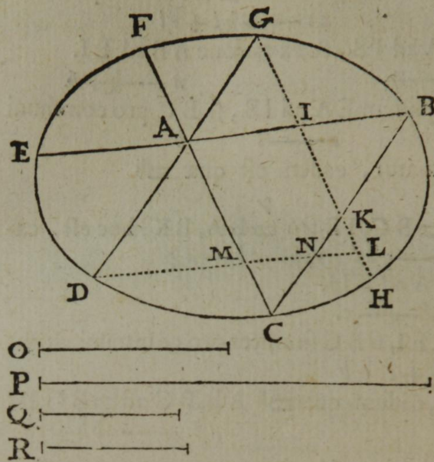
B A, sicut A G ad A I: erit pariter ▭ sub B C, A I æquale ▭[lo] sub A B, A G.

Jam verò, quia ex natura Ellipsis ▭ F A C est ad ▭ G I H, ut ▭ E A B ad ▭ E I B; & quidem ratio ▭[li] F A C ad ▭ G I H composita sit ex ratione F A ad I H seu I K + K H, & ex ratione C A ad G I, id est, assumendo communem altitudinem B C, ex ratione ▭[li] B C, C A ad ▭ B C, G I vel β ▭ C A, A G, sive etiam, re-

Simi-

Similiter ratio ▭li E A B ad ▭ E I B compoſita eſt
ae —— kl + el
ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I.
e —— l   *a —— k + e.*
Quarum quidem E A ad I B, ſi B C pro communi
e —— l   *b*
altitudine ſumatur, eadem eſt quæ ▭li
γ
B C, E A ad ▭ B C, I B ſeu ▭ B A, B K, hoc eſt, ea-
be —— bl vel *ab —— az*
dem quæ *δ* F A ad K H.
d —— x.
Sed A B ad E I, ſi B C ſimiliter pro communi altitu-
a —— k + e   *b*
dine ſumatur, eadem, quæ ▭li A B, B C ad ▭ B C, E I
ab —— bk + be
ε   *α*
vel ▭ B C, A I, id eſt, B A, A G, + ▭ B C, E A vel ▭ B A,
ſive   *az + ay,*
A D, hoc eſt, relictâ communi altitudine A B, ſeu *a*,
eadem quæ B C ad A G + A D.
b —— z + y.
Erit igitur ratio compoſita ex ratione
F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id eſt,
d —— f + x   *b —— z*
per 23. 6ti, ratio ▭li F A, B C ad ▭ I K, A G + ▭ K H, A G,
bd —— fz + xz
eadem rationi quæ componitur ex ratione F A ad K H,
d —— x
& ex ratione B C ad A G + A D, id eſt, per 23. 6ti,
b —— z + y
eadem rationi, quam habet
▭ F A, B C ad ▭ K H, A G + ▭ K H, A D.
bd —— xz + xy.

jectâ communi altitudine C A, ex ratione B C ad A G; At ratio ▭li E A B ad ▭ E I B compoſita ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I; quarum quidem E A ad I B, ſi B C pro communi altitudine ſumatur, eſt ſicut ▭ B C, E A ad ▭ B C, I B ſeu *γ* ▭ B A, B K, quæ eadem oſtenſa eſt *δ* rationi F A ad K H; ſed A B ad E I, ſi B C ſimiliter pro communi altitudine ſumatur, ut ▭ A B, B C, ad ▭ B C, E I, id eſt, ad ▭ B C, A I vel *ε* B A, A G, + ▭ B C, E A vel *α* ▭ B A, A D, ſive etiam, relictâ communi altitudine A B, ut B C ad A G + A D: Erit ratio compoſita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id eſt, per 23. 6ti, ratio ▭li F A, B C ad ▭ I K, A G + ▭ K H, A G, eadem rationi, quæ componitur ex F A ad K H, & ex ratione B C ad A G + A D, id eſt, per 23. 6ti, eadem rationi, quam habet ▭ F A, B C ad ▭ K H, A G + ▭ K H, A D.



Hinc cum
▭FA,BC, sit ad ▭IK,AG+▭KH,AG, sicut idem ▭FA,BC ad
bd ——— *fz*+*xz* ——— *bd* /
▭KH, AG+▭KH, AD: erit, per 9. 5ti,
ad *xz*+*xy*:

▭IK,AG+▭KH,AG æq. ▭KH,AG+▭KH,AD.
fz+*xz* ∞ *xz*+*xy*.

Unde, dempto utrinque communi ▭lo KH, AG,
xz
erit quoque reliq. ▭IK, AG æquale reliquo ▭lo
fz
KH, AD.
xy

Ac proinde, per 16. 6ti,
ut IK ad KH, ita DA ad AG.
f —— *x* —— *y* / ad *z*.

Hinc cum ▭ FA,BC ad ▭IK, AG+▭KH, AG eandem habeat rationem, quam idem ▭FA,BC ad ▭KH, AG +▭KH, AD: erit ▭IK, AG +▭KH, AG æquale ▭lo KH, AG+▭lo KH, AD. A quibus si commune auferatur ▭KH, AG, erit quoque reliquum ▭IK, AG æquale reliquo ▭lo KH, AD. Unde erit ut IK ad KH, ita DA ad AG.

Sed

BC

Sed ut IK ad KH, ita eſt, aſſ. comm. altit. *b*,

f —— *x*

ζ

▭ IK, BC vel ▭ CA, BK ad ▭ KH, BC.

bf *cb*—*c*ζ —— *bx*.

AB

At DA ad AG, ita, aſſ. com. alt. *a*, eſt ▭ DA, AB

y—ζ *ay*

α

vel ▭ BC, AE ad ▭ AG, AB.

be ——— *a*ζ.

Quare erit ut

▭ CA, BK ad ▭ KH, BC, ita ▭ BC, AE ad ▭ AG, AB.

cb—*c*ζ —— *bx* ——— *be* / ad *a*ζ.

δ BC

Cum autem ſupra ſit FA ad KH, i.e., aſſ. com. alt. *b*,

d —— *x*

▭ FA, BC ad ▭ KH, BC, ſicut ▭ AE, BC ad ▭ KB, BA,

bd ——— *bx* ——— *be* / ad *ab*—*a*ζ

hoc eſt, convertendo

▭ KH, BC ad ▭ FA, BC, ſicut ▭ KB, BA ad ▭ AE, BC:

bx ——— *bd* ——— *ab*—*a*ζ / ad *be*:

Erunt ▭ CA, BK ▭ KH, BC ▭ FA, BC tres magnitudines ab una parte,

cb—*c*ζ —— *bx* .... *bd*

& ▭ KB, BA ▭ AE, BC ▭ AG, AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata:

ab—*a*ζ ..... *be* ——— *a*ζ

Sed ut IK ad KH, ita eſt, aſſumptâ communi altitudine BC, ▭ IK, BC vel ζ ▭ CA, BK ad ▭ KH, BC. At ſicut DA ad AG, ita, aſſumptâ communi altitudine AB, ▭ DA, AB vel α ▭ BC, AE ad ▭ AG, AB. Quare erit ut ▭ CA, BK ad ▭ KH, BC, ita ▭ BC, AE ad ▭ AG, AB. Cum autem ſupra ſit δ, ut FA ad KH, ſive, aſſumptâ communi altitudine BC, ▭ FA, BC ad ▭ KH, BC, ita ▭ AE, BC ad ▭ KB, BA; id eſt, convertendo, ▭ KH, BC ad ▭ FA, BC, ſicut ▭ KB, BA ad ▭ AE, BC: erunt ▭ CA, BK, ▭ KH, BC, & ▭ FA, BC 3 magnitudines ab una parte, & ▭ KB,

BA, ▭ AE, BC, & ▭ AG, AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata.

 Quare

Quare etiam per 23. 5^{ti} ex æqualitate proportionales erunt

id eſt, ▭ C A, BK ad ▭ F A, B C, ſicut ▭ K B, B A
cb—cz ——— *bd* ——— *ab—az*
B A
ad ▭ A G, B A, ſeu, rej. com. alt. *a*, ut K B ad A G.
——— *az* . . . . *b—z*——*z*.

Id quod convenit cum æquatione inventa pag. 371, *multiplicando ſc. tum extremos tum medios terminos, oſtendens nos in eodem calculo Geometricè explicando eò perveniſſe, ubi*
cbz — czz æquatur bbd — bdz.

Denique ut inveniatur A G ſeu *z*, quoniam ſumendo C A ſeu *c* pro communi altitudine,
K B eſt ad A G, ſicut ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G:
b—z ——— *z* ——— *cb—cz* / ad *cz*:
erit ut
▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G.
cb—cz ——— *bd* ——— *cb—cz* / ad *cz*.
Hinc cum ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C & ad ▭ C A, A G
cb—cz *bd* *cz*
eandem habeat rationem, erit per 9. 5^{ti},
▭ F A, B C æq. ▭lo C A, A G.
bd ∞ *cz*.
Unde per 16. 6^{ti} erit,
ut C A ad A F, ita B C ad A G.
c ——— *d* ——— *b* / ad *z*.
Quod erat propoſitum.

Unde & ipſæ ex æqualitate proportionales erunt, nimirum, erit ut ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ K B, B A ad ▭ A G, B A, id eſt, relictâ communi altitudine B A, ita K B ad A G. Denique, quoniam, aſſumptâ communi altitudine C A, K B eſt ad A G, ſicut ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G: erit ut ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G. Quocirca cum ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C & ad ▭ C A, A G eandem habeat rationem, erit ▭ F A, B C æquale ▭lo C A, A G; ac proinde C A ad A F, ſicut B C ad A G. Quod erat demonſtrandum.

F I N I S.

Errata quæ post diligentius examen in prima hujus operis parte insuper reperta fuere, sic emendet benevolus Lector.

Pag. 33, lin. 11 pro $+\sqrt{oo}$ lege $+x\sqrt{oo}$. ibid. l. 12, pro $\sqrt{oo+4mp+mm}$ scribe $\sqrt{oo+4mp+mm}$. p. 79, l. penult. pro $+4r$ scribe $-4r$. p. 83, l. 8, deleatur virgula transversa. p. 91, l. 6, lege $\frac{1}{2}a$. p. 103, l. 2 pro $\frac{tt}{2n\sqrt{v}}$ scribe $\frac{tt}{4nnv}$. p. 120, l. penult. pro $\frac{am^2}{oz}$ lege $\frac{am^2}{oz}$. p. 183, l. 7 pro $\frac{foz}{z}$ scribe $\frac{foz}{a}$. p. 298, l. 10 lege $\frac{-aax+aa}{a+1}$. p. 306, l. 3 pro 1140 scribe 1440. p. 311, inter K & M in figura notetur litera O. pag. 327, l. penult. loco rr pone $\frac{rr}{q}$. p. 355, l. penult. pro $3a^4b$ scribe $3a^4bb$. p. 357, in margine pro 349 lege 348. p. 370, l. 12 deleatur linea transversa. p. 371, l. 15, ea scribatur literis minoribus, quibus calculus notatur. p. 375, l. 2 lege $\frac{21pry}{8q}$. p. 415, l. 36. adde $+4abxx$. p. 416, ult. l. scribe $x-\sqrt{xx+aa}$. p. 423 in princip. scribe $d^4 \propto ad^3+2abdd-2aabd \propto bbdd+aadd-aabb$. p. 442 in fine pro $x\sqrt{C.r} \propto 0$, pone $x+\sqrt{C.r} \propto 0$. p. 443 in fine $xx \; 8 \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$, pone $xx+\frac{t}{r} \propto 0$. p. 451, juxta q, s, t, dele C. p. 457, l. 4. lege A, B, C, D. p. 460 l. 22, adde $+\frac{1}{2}bbccx$. p. 470 in fine, dele, *in hoc exemplo*. p. 475, l. 8, pro $+8hy+4s$, scribe $-8hy-4s$. p. 476 in fine, pro *non poterit radix extrahi*, pone, poterit radix extrahi, inveniturque $y \propto -1$, sed æquatio Proposita non poterit dividi per $xx-1x+1 \propto 0$. p. 478 in medio, scribe $y^3+3y-10 \propto 0$. p. 483 l. 10, dele *cujus ultimus terminus fractione caret*, & l. 12 lege *quantitates rationales fractioneque carentes*. p. 497 dele, *quæ raro itidem eundem dimensionum numerum habent*, utpote jam antea dictum. p. 499 l. 12, pro $\frac{1}{2}p$ pone $-\frac{1}{2}p$. p. 505 l. 2, scribe 1, 2, 12, 13 & 14. p. 517, l. 13, lege *inventam*.

Cæterum errata secundæ partis hujus operis sic restituat.

Pag. 48, l. 8, pro l. 1 & 2 pone l. 2. p. 158, fig: 3 linea AC continua sit, quod & aliis locis in eadem figura est observandum. p. 166, l. 9 pro MKG², *at vero parabolam in puncto* G. lege MKX², *per parabolam transeat in puncto* G. p. 171 & seqq., in fig. 2 pro MR lege MB. p. 189 in fig. I, linea BE continue, ac RS per puncta tantum ducta sit. p. 197, l. 3 pro ac lege ad. p. 206, in fig. II desideratur litera L, ac in fig. III, loco inferioris V repon. Z. p. 225, in utraque figura linea HA continua sit. p. 226, lineæ HK & HM ad F & N productæ sint. p. 233, l. 21 lege OAD *vel* OAE. p. 239 fig. superioris linea BH per puncta ducta sit, quod & observandum p. 240 in eadem fig. p 244, l. 11 à fine pro *lineâ* lege *linea*. p. 254, l. 1 dele vocabulum *sectionis*, quod ibidem uti & p. 262, l. 17. p. 316, l. 9 à fine, p. 322, l. 3. p. 330, l. 12, & pluribus forsitan locis præter mentem auctoris irrepsit. p. 292, l. 6 in fine loco a^4 substitue b^4, ibid. in fig. notentur puncta ad D, F & H, ita ut sit AF $\propto$ BG, FH $\propto$ GH & CD $\propto$ CB. p. 295, l. 2 à fine dele *itaque*. P. 311, l. 11 pro *eritque* lege *&c*. P. 324, l. 4 à fine pro *terminis* lege *terminus*. P. 332, l. 6 pro *Hyperbolæ* lege *Hyperbole*.

LECTORI BENEVOLO
J. HUDDE S. P.

IN Galliis eram cum epiſtolæ meæ imprimerentur, ideoque domum redux, onus in me ſuſcepi omnia de integro revidendi & ad calculum revocandi, ut probe mihi conſtaret, num quædam nimis obſcurè expreſſa eſſent, vel etiam errata irrepſiſſent; Quæcunque inveni, illa ſunt quæ ſequuntur.

Ad clariorem ſenſum.

p. 424 l. 15, *Excepto* &c. Cum $x - a \propto 0$, multiplicatur per $b - c$, reſultat $bx - cx - ab + ac \propto 0$, ſeu $x \propto \frac{ab - ac}{b - c}$; ſi ponas jam $b - c \propto 0$, non ſequitur valorem x per hanc æquationem non poſſe inveniri, quandoquidem Nominator $ab - ac$ per $b - c$, dividi poteſt, ſed tum ſequitur cum Nominator per Denominatorem non dividi poteſt, vel cum ambo per eandem quantitatem indiviſibiles ſunt: Notandum ergo eſt Denominatorem hic conſiderari ſine relatione ad Nominatorem, veluti patet ex ſequentibus, 1°. *Obſervandum venit num ejuſmodi quantitates in æquatione reperiantur* &c. 2°. *ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant.* Sed hæc omnia fortaſſis clarius ſic intelligentur. Excepto tantum ſi æquationis primus terminus non affectus quantitate cognita ſit ab una parte, reliqui, qui ab altera ſunt, faciant fractionem, cujus Denominator, vel Denominatoris diviſor aliquis, Nominatorem dividat; quod ſi contingat, videndum eſt, priuſquam concludatur non dari duarum æquationum communem aliquem diviſorem, num etiam altera æquatio per hunc Denominatorem, vel Denominatoris diviſorem aliquem, diviſibilis ſit. p. 459, l. 10. vel ſic lege, æquatio illa ſemper indiviſibilis erit per x, x^3, x^5, &c., 8, vel per xx, x^4, x^6, &c., — quantitate quavis cognita atque rationali. p. 462, l. 29. pro *omnes quantitates*, pone omnia membra. p. 492, l. 13. pro *Regula*, ſcribe Methodo. p. 451 & 456, l. 1. lege, nullus terminus eſt $\propto 0$. p. 500, in medio, pro *Quoniam tunc* $\sqrt{C.}$ *ex* $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ *extrahi poterit*; ſcribe, extrahendo $\sqrt{C.}$ ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$. & pro, *ſed cum* $\sqrt{C}$ *&c.*, uſque ad, *liceat, &c.*; pone, ſed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ p. 389, vel perfectè extrahi queat, vel vulgari modo præterpropter, quod ſufficit, poterit etiam ejuſdem beneficio radix ex æquatione Propoſita ſive numerali, ſive literali ſit, inveniri, cum pro literis numeros, vel o, ad arbitrium aſſumere liceat. p. 502, l. 31. & p. 505, l. 17. *reduci* hic ſumitur pro redigi ad duas alias, ex quarum multiplicatione Propoſita æquatio produci poteſt. Errata, quæ irrepſerunt, inveniuntur inter errata primæ partis.

Nec tacere fas eſt me, non ſine admiratione, in epiſtolis meis, quæ tam ſedulam typothetarum operam requirebant, tam paucos errores offendiſſe, niſi cogitarem D. Elzevirios & Clariſſimum Schotenium totis viribus huic operæ incubuiſſe, quapropter nullus dubito quin reliquum totum opus accuratius impreſſum ſit, quam quis fortaſſis exſpectaſſet.

CARMEN

IN LAUDEM

FR. à SCHOOTEN,

Mathematicorum ocelli.

SCoten I cum ſcripta legis, ſe promit ubique
Ingenii mira dexteritate vigor.
Cum vitam ac mores ſpectas, ſe præbet ubique
Spectandam integritas, ac ſine fraude manus.
Sic quæ perrarò concurrunt corpore in uno,
Hic jungi ingenium cum probitate vides.
Adde quod, ingenium cum ſit ſuperabile paucis,
Vix tamen invenies in probitate parem.

ΠΕΡΙ'

ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΥ ΣΚΩΤΗΝΟΥ,

τοῦ μακαρίτου,

Διάλογος Μαθήσεως, Εὐσεβείας, καὶ Ὁδοιπόρου.

Μάθ. Τί κλαίεις; σφετέρους τί νέον φρένας ἵκετο πένθος;
(Ἐξαύδα, καὶ μὴ κεῦθε νόῳ, Εὐσεβίη)
Ἠδ' ἐσθῆτα μέλαιναν ἐέσσαο; χώματι τούτῳ
Ἤματα καὶ πάσας νύκτας ἐφεζομένη;
Εὐσ. Θυμήρης μοι υἱὸς ἀπώλετο, φέρτατος ἀνδρῶν,
Ὃς Σοφίῃ θείην μῖξε ταπεινοσύνην.
Τὸν Βατάβων Λούγδουνον ἐγείνατο, τόν τε μαθητὴν
Δῶκά σοι ἐξ ἁπαλοῦ ἀγχίνοον βρέφεος.
Μ. Σκώτηνος; Ε. κεῖνος. Μ. Σκώτηνος; λείψανον ἀνδρῶν
Χρυσείου γένεος, λείψανον ἡμιθέων;
Σκώτηνος; τὸν ἐμοῖσιν ἴσον φαέεσσι φίλησα,
Ἠδέ μ' ὑπὲρ πασῶν ἀντεφίλησε Θεῶν.
Ὃς πόρον ἄστρ' ἀπόρων, αἰεὶ φώτισε σκοτεινὸν
Συμμύσαις, ζοφερῷ κεῖται ἐνὶ σκότεϊ;
Εὐσ. Εἰνὶ σκότῳ κεῖται, πᾶσιν μερόπεσσι φαεινός,
Οἵ τε καὶ Εὐσεβίην, καί σε, φίλη, ἔφιλον.
Μάθ. Οὐκ ἀλόγως ἀκρίτως τε, θεά, κατὰ δάκρυα λείβεις,
Καὶ στέρνον πλήττεις αἰὲν ὀδυρομένη.
Δὸς τόπον, οὐχ ὅππως (τὸ πάλαι τάχα ποιησαίμην
Ὅταν ἔην πάντων πολὺ μάκαρ μακάρων)
Γαῖαν κινήσαιμι, ἀκίνητόν περ ἐοῦσαν,
Αὐτὰρ ὅπως, ποσὶν σεῖο προσισταμένη,
Αὐτὴ ἀκίνητος μίμνω, νεαρῆς τε λυπηρὸν
Μνῆμα πέλω Νιόβης πᾶσιν ἐφημερίοις.
Ὁδοιπ. Ὦ θεαί, οὐκ ἔστιν δακρύων ἅλις; οὔποτε νεκρὸς
Δάκρυσι καὶ στοναχαῖς εἰς φάος αὖθις ἔβη.
Ἀλλ' ἴτε, κ' εὐόδμοισι ῥόδοις καταπάσατε γαῖαν,
Λείρια μιξάμεναι καὶ κυαναυγὲς ἴον.
Εὔξασθ', ὥσπερ ἔην μερόπων βαρὺς οὐδενὶ ζωός,
Οὕτω καὶ κούφη γαῖα νεκρῷ πελέθῃ.

Μ. ΣΛΑ͂ΔΟΣ,
ἰατρὸς Ἀμστελ.

